Matrikel								SKZ				Name	

Klausur MA1 (Analysis) 25. Juni 2003 (A)

Musterlösungen

Aufgabe 1 *Definieren Sie eine Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$, welche surjektiv, aber nicht injektiv ist.*

Musterlösung: $f(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right|$.
Alternativen: $4(x-\frac{1}{2})^2$, $|\sin(\pi x)|$, $|\sin(100x)|$, $\begin{cases} 2x & x < \frac{1}{2} \\ 2x-1 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$, und viele mehr.

Aufgabe 2 *Bestimmen Sie*

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{2+n^2}{3+5n+2n^2} + \frac{2}{\log n}\Big)\Big(\frac{n}{n^2+1} + (1+\frac{1}{n})^n\Big).$$

Musterlösung:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2+n^2}{3+5n+2n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2}+1}{\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n}+2} = \frac{1}{2}, \\
\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\log n} &= 0, \\
\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}} = 0, \\
\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n &= e.
\end{aligned}$$

Ergebnis daher: $(\frac{1}{2}+0)(0+e) = \frac{e}{2}$.
Anmerkung: Bei den ersten 3 Teilen kann man auch mit der Regel von de L'Hospital argumentieren; der letzte ist eine der gängigen Definitionen der Eulerschen Zahl e.

Aufgabe 3 *Welche der folgenden Reihen konvergieren?*

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ *(b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-1}{2k^2}$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Musterlösung:
(a) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, da a_k eine alternierende Folge und $|a_k|$ eine monoton fallende Nullfolge bildet.
(b) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergiert, da $\lim_{k\to\infty} b_k = 1/2 \neq 0$.

Aufgabe 4 *Berechnen Sie für die Funktion*

$$f : x \mapsto \frac{1-\cos(x/2)}{1-\cos(x)}$$

den Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$*, falls er existiert.*

Musterlösung:
Nach de l'Hospital gilt:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x/2)}{2\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x/2)}{4\cos(x)} = \frac{1}{4}.$$

Aufgabe 5 *Man berechne den Radius r und die Höhe h (oder die Relation zwischen r und h) eines Zylinders mit gegebener Oberfläche O und maximalem Volumen.*

Musterlösung:
Man verwendet die Formel für die Oberfläche und drückt h durch O und r aus. Dann ersetzt man h mit diesem Ausdruck in der Formel für V und sucht Extremwerte als Nullstellen der Ableitung. (Man kann auch mit dem Durchmesser d rechnen und bekommt r als $d/2$.)
Es gilt

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

und somit

$$h = \frac{O - 2\pi r^2}{2\pi r}.$$

Weiters gilt

$$V = h r^2 \pi$$

und nach der Ersetzung

$$V = \frac{O - 2\pi r^2}{2\pi r} r^2 \pi = -\pi r^3 + \frac{O}{2} r.$$

Die Ableitung ist

$$-3\pi r^2 + \frac{O}{2}$$

mit der positiven Nullstelle

$$r = \sqrt{\frac{O}{6\pi}}.$$

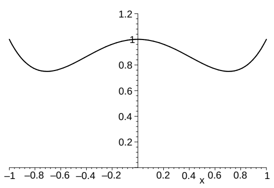
Damit erhalten wir

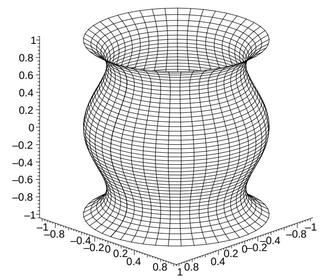
$$h = \frac{O - 2\pi \frac{O}{6\pi}}{2\pi \sqrt{\frac{O}{6\pi}}} = \sqrt{\frac{2O}{3\pi}}.$$

Somit gilt auch

$$\frac{r}{h} = \frac{\sqrt{\frac{O}{6\pi}}}{\sqrt{\frac{2O}{3\pi}}} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 6 *Der Graph der Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4 - x^2 + 1$ definiert einen Rotationskörper, der wie eine Vase aussieht, wenn man den Graphen um die x-Achse rotiert (siehe Abbildung). Man berechne das Volumen der Vase.*





Musterlösung:
Man integriert die Fläche der Kreisscheiben mit Radius $f(x)$ von -1 bis 1:

$$V = \int_{-1}^{1} \pi f(x)^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} x^8 - 2x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 1 \, dx =$$
$$= \pi \Big(\frac{x^9}{9} - 2\frac{x^7}{7} + 3\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x \Big)\Big|_{-1}^{1} = \frac{478}{315}\pi \approx 4.767.$$

Aufgabe 7 *Berechnen Sie den Wert folgender Integrale:*

1. $$\int_\alpha \frac{dz}{z}$$

   wobei α den Weg entlang des Einheitskreises $|z| = 1$ von -1 nach 1 in positiver Orientierung bezeichne.

2.

$$\int_\beta |z| dz.$$

Der Weg β ist hier $\beta\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \mapsto t + it.$

Musterlösung:
Der Weg α ist gegeben durch

$$\alpha\colon z(t) = e^{it}, \qquad \pi \leq t \leq 2\pi.$$

Daher ist

$$dz = ie^{it} dt$$

und das Integral ist

$$\int_\alpha \frac{dz}{z} = \int_\pi^{2\pi} \frac{ie^{it}dt}{e^{it}} = i \int_\pi^{2\pi} dt = i\pi.$$

Für den Weg β gilt

$$\beta\colon z(t) = (1+i)t, \quad dz = (1+i)dt,$$

daher

$$\begin{aligned}\int_\beta |z| dz &= \int_0^1 |(1+i)t|(1+i)dt = |1+i|(1+i) \int_0^1 |t| dt = \\ &= \sqrt{2}(1+i) \int_0^1 |t| = \sqrt{2}(1+i) \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Aufgabe 8 *Skizzieren Sie das Richtungsfeld und einige Lösungskurven der Differentialgleichung*

$$x' = 3x.$$

Berechnen Sie mittels Potenzreihen-Ansatzes die allgemeine Lösung.

Musterlösung:
Lösungsfunktion als Potenzreihe mit unbekannten Koeffizienten

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \cdots .$$

Ihre Ableitung ist

$$x' = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \cdots .$$

Die Potenzreihe für $3x$ ist

$$3x = 3a_0 + 3a_1 t + 3a_2 t^2 + 3a_3 t^3 + 3a_4 t^4 + \cdots .$$

Vergleich der Koeffizienten ergibt

$$3a_n = (n+1)a_{n+1}.$$

Schreiben wir c für a_0 so gilt

$$a_1 = 3c,\ a_2 = \frac{3^2 c}{2},\ a_3 = \frac{3^3 c}{3!},\ \ldots\ a_n = \frac{3^n c}{n!}.$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$x = \sum_{n=0}^\infty \frac{3^n c}{n!} t^n = c \sum_{n=0}^\infty \frac{3^n}{n!} t^n = c \sum_{n=0}^\infty \frac{(3t)^n}{n!} = ce^{3t}.$$