

Matrikel													SKZ					Name	
----------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	-----	--	--	--	--	------	--

Klausur MA1 (Analysis) 25. Juni 2003 (B)

Musterlösungen

Aufgabe 1 Definieren Sie eine Funktion $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, welche surjektiv, aber nicht bijektiv ist.

Musterlösung: $f(x) = 2 \left| x - \frac{1}{2} \right|$.

Alternativen: $4(x - \frac{1}{2})^2$, $|\sin(\pi x)|$, $|\sin(100x)|$, $\begin{cases} 2x & x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$, und viele mehr.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + n^2}{3 + 5n + 2n^3} + \frac{2 + \log n}{\log n} \right) \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{n+1}{n^2} \right).$$

Musterlösung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + n^2}{3 + 5n + 2n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2} + 1}{\frac{3}{n^2} + \frac{5}{n} + 2n} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \log n}{\log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{\log n} + 1}{1} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{n} = 0.$$

Ergebnis daher: $(0 + 1)(e + 0) = e$.

Anmerkung: Bei den ersten 2 Teilen, und dem letzten, kann man auch mit der Regel von de L'Hospital argumentieren; der dritte ist eine der gängigen Definitionen der Eulerschen Zahl e .

Aufgabe 3 Welche der folgenden Reihen konvergieren?

$$(a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k+1}} \qquad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 1}{2k^2}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Musterlösung:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, da a_k eine alternierende Folge und $|a_k|$ eine monoton fallende Nullfolge bildet.

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergiert, da $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 1/2 \neq 0$.

Aufgabe 4 Berechnen Sie für die Funktion

$$f: x \mapsto \frac{1 - \cos(x/3)}{1 - \cos(x)}$$

den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, falls er existiert.

Musterlösung:

Nach de l'Hospital gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/3)}{3 \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x/3)}{9 \cos(x)} = \frac{1}{9}.$$

Aufgabe 5 Man berechne den Durchmesser d und die Höhe h (oder die Relation zwischen d und h) eines Zylinders mit gegebener Oberfläche O und maximalem Volumen.

Musterlösung:

Man verwendet die Formel für die Oberfläche und drückt h durch O und d aus. Dann ersetzt man h mit diesem Ausdruck in der Formel für V und sucht Extremwerte als Nullstellen der Ableitung. (Man kann auch mit dem Radius r rechnen, und bekommt d als $2r$.)

Es gilt

$$O = 2\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \pi dh = \pi \frac{d^2}{2} + \pi dh$$

und somit

$$h = \frac{2O - \pi d^2}{2\pi d}.$$

Weiters gilt

$$V = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h$$

und nach der Ersetzung

$$V = \pi \frac{d^2}{4} \cdot \frac{2O - \pi d^2}{2\pi d} = -\frac{\pi d^3}{8} + \frac{Od}{4}.$$

Die Ableitung ist

$$-\frac{3}{8}\pi d^2 + \frac{O}{4}$$

mit der positiven Nullstelle

$$d = \sqrt{\frac{2O}{3\pi}}.$$

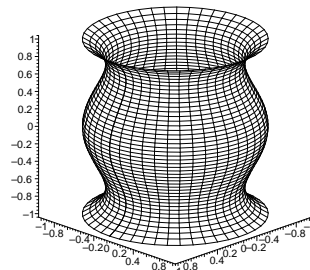
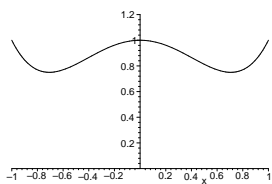
Damit erhalten wir

$$h = \frac{2O - \pi \frac{2O}{3\pi}}{2\pi \sqrt{\frac{2O}{3\pi}}} = \sqrt{\frac{2O}{3\pi}}.$$

Somit gilt auch

$$\frac{d}{h} = 1.$$

Aufgabe 6 Der Graph der Funktion $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4 - x^2 + 1$ definiert einen Rotationskörper, der wie eine Vase aussieht, wenn man den Graphen um die x -Achse rotiert (siehe Abbildung). Man berechne das Volumen der Vase.



Musterlösung:

Man integriert die Fläche der Kreisscheiben mit Radius $f(x)$ von -1 bis 1 :

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 \pi f(x)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (x^8 - 2x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 1) dx = \\ &= \pi \left(\frac{x^9}{9} - 2\frac{x^7}{7} + 3\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{478}{315}\pi \approx 4.767. \end{aligned}$$

Aufgabe 7 Berechnen Sie den Wert folgender Integrale:

1.

$$\int_{\alpha} \frac{dz}{z}$$

wobei α den Weg entlang des Einheitskreises $|z| = 1$ von -1 nach 1 in negativer Orientierung bezeichne.

2.

$$\int_{\beta} |z| dz.$$

Der Weg β ist hier $\beta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t + it$.

Musterlösung:

Der Weg α ist gegeben durch

$$\alpha: z(t) = e^{-it}, \quad \pi \leq t \leq 2\pi.$$

Daher ist

$$dz = -ie^{-it} dt$$

und das Integral ist

$$\int_{\alpha} \frac{dz}{z} = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{-ie^{-it} dt}{e^{-it}} = -i \int_{\pi}^{2\pi} dt = -i\pi.$$

Für den Weg β gilt

$$\beta: z(t) = (1 + i)t, \quad dz = (1 + i)dt,$$

daher

$$\begin{aligned} \int_{\beta} |z| dz &= \int_0^1 |(1 + i)t|(1 + i) dt = |1 + i|(1 + i) \int_0^1 |t| dt = \\ &= \sqrt{2}(1 + i) \int_0^1 |t| dt = \sqrt{2}(1 + i) \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 8 Skizzieren Sie das Richtungsfeld und einige Lösungskurven der Differentialgleichung

$$x' = 3x.$$

Berechnen Sie mittels Potenzreihen-Ansatzes die allgemeine Lösung.

Musterlösung:

Lösungsfunktion als Potenzreihe mit unbekanntem Koeffizienten

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots$$

Ihre Ableitung ist

$$x' = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \dots$$

Die Potenzreihe für $3x$ ist

$$3x = 3a_0 + 3a_1 t + 3a_2 t^2 + 3a_3 t^3 + 3a_4 t^4 + \dots$$

Vergleich der Koeffizienten ergibt

$$3a_n = (n + 1)a_{n+1}.$$

Schreiben wir c für a_0 so gilt

$$a_1 = 3c, \quad a_2 = \frac{3^2 c}{2}, \quad a_3 = \frac{3^3 c}{3!}, \quad \dots \quad a_n = \frac{3^n c}{n!}.$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n c}{n!} t^n = c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} t^n = c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3t)^n}{n!} = ce^{3t}.$$