

10. Übungszettel
Mathematik 1 (Analysis)
Sommersemester 2003

1. Man berechne die Bogenlänge der Hyperbel $xy = 1$ zwischen den beiden Punkten $(\frac{1}{2}, 2)$ und $(2, \frac{1}{2})$. (Zur Berechnung sollte ein Programm wie in Beispiel 2 von Zettel 9 eingesetzt werden, die Stammfunktion ist von Hand schwer zu finden.)

2. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert das uneigentliche Integral $\int_1^\infty x^\alpha dx$?

3. Man berechne das Integral $\int_0^1 f(t) dt$, wobei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die Funktion $t \mapsto f(t) = \cos(t) + i \sin(t) = e^{it}$ ist.

4. Man berechne den Wert des Integrals von $f(z) = \frac{1}{z}$ von $z_0 = 1$ bis $z_1 = -1$ entlang dem Integrationsweg $C_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \cos(t) + i \sin(t)$.

5. Man berechne den Wert des Integrals von $f(z) = \frac{1}{z}$ von $z_0 = 1$ bis $z_1 = -1$ entlang dem Integrationsweg $C_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \cos(t) - i \sin(t)$, und überprüfe ob das Ergebnis mit Beispiel 3 übereinstimmt.

6. Man berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$x \mapsto f(x) = 1 - cx^2 + c^2x^4 - c^3x^6 \dots,$$

und berechne $f(1)$ (falls $x = 1$ im Konvergenzbereich liegt).

7. Man berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$x \mapsto g(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i},$$

und berechne $g(\frac{1}{2})$ (falls $x = \frac{1}{2}$ im Konvergenzbereich liegt).