4. Übungszettel
Mathematik 1 (Analysis)
Sommersemester 2003

1. Ist 4^n ein $\mathrm{O}(2^n)$? Ist 2^n ein $\mathrm{o}(4^n)$?

2. Die Folge $(a_n)_n$ sei wie folgt definiert:

$$a_{3n} = \frac{1}{2n+1}, a_{3n+1} = \frac{1}{2n+2}, a_{3n+2} = \frac{-1}{n+1}.$$

Man zeige, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \dots$$

konvergiert und den gleichen Grenzwert besitzt wie die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \dots.$$

3. Die Folge $(b_n)_n$ ist durch Umordnung der Reihe $(a_n)_n$ aus Beispiel 2 wie folgt definiert: $b_{4n} = a_{3n}, b_{4n+2} = a_{3n+1}, b_{2n+1} = a_{3n+2}$. Man berechne $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

4. Die Folge $(a_n, b_n)_n$ in $\mathbb{R}^2$ sei durch die Rekursion

$$(a_0, b_0) = (1, 0), (a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n - b_n}{2} + 1, \frac{a_n + b_n}{2} \right)$$

definiert. Man bestimme den Grenzwert numerisch und graphisch (durch Zeichnen einiger Glieder in der Koordinaten-Ebene).

5. Man zeige, daß die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sin(i)}{2^i}$ und $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i}{4^i}$ konvergieren.

6. Ist die Funktion $\max : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(a_1, \dots, a_n) \mapsto \max(a_1, \dots, a_n)$ stetig?

7. Man berechne eine Nullstelle der Funktion

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x) - \sqrt{(}x)$$

mit dem Bisektionsverfahren. Wieviel Schritte sind nötig, um eine Genauigkeit von 3 Dezimalstellen zu erreichen?