

5. Übungszettel

Mathematik 1 (Analysis)

Sommersemester 2003

1. Für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ berechne man numerisch $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, falls existent: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$, $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Man skizziere auch jeweils den Graph der Funktion in der Nähe von $x = 0$.

2. Man berechne die Ableitung der Funktion $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow \sin(x)$. Hinweis: Man verwende die Formel $\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$ und Beispiel 1.

3. Man beweise: Wenn $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv und differenzierbar ist, und wenn $f'(x) \neq 0$ für alle x , dann ist $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls differenzierbar und es gilt $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$. Hinweis: Man verwende die Kettenregel.

4. Man verschaffe sich Zugang zu Software, mit der man Ausdrücke der Art $\sqrt{\frac{1}{(\cos(x))^2} - (\tan(x))^2}$ differenzieren kann. (Was ist das Ergebnis?)

5. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$. Man berechne die Gleichung der Tangente T an den Graph von f im Punkt $(0, d)$.

6. Warum ist die Funktion $\text{abs} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$, an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar?

7. Wie groß ist die Höhe, die im freien Fall zurückgelegt werden muß, um beim Aufprall eine Geschwindigkeit von 30km/h (bzw. 40 km/h, bzw. 50 km/h) zu erreichen? Hinweis: Man verwende die in der Vorlesung hergeleitete Weg-Zeit-Funktion für den freien Fall.

Zusatzfrage: Ein Sprung aus der errechneten Höhe ist vergleichbar mit einem Aufprall mit einem Auto an ein stehendes Hindernis mit der angegebenen Geschwindigkeit. Welche Folgerungen lassen sich ziehen?