6. Übungszettel
Mathematik 1 (Analysis)
Sommersemester 2003

1. Es sei $f : [0,1] \to [0,1]$ die Funktion $x \mapsto \sqrt[7]{1-x}$. Man finde zwei Zahlen a, b, $0 < a < b < 1$, sodaß die rekursive Folge $x_{n+1} = f(x_n)$ mit Startwert $x_0 \in [a,b]$ in $[a,b]$ bleibt, und gleichzeitig der Betrag der Ableitung durch eine Zahl $q < 1$ beschränkt ist.

2. Man berechne den Fixpunkt der Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ aus Beispiel 1 numerisch.

3. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$(x_1, x_2) \mapsto \left(x_2, 111 - \frac{1130 - 3000/x_1}{x_2} \right).$$

Man berechne die Ableitung von f an der Stelle $(6,6)$.

4. Es sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Funktion

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_2, -13.8888x_1 + 17.5x_2).$$

Es sei $(p_n)_n$ die Folge in $\mathbb{R}^2$ definiert durch die Rekursion $p_{n+1} = f(p_n)$ und Startwert $p_0 = (6,5)$. Konvergiert die Folge? Man berechne die Anfangsglieder numerisch.

5. Man zeichne die Anfangsglieder der Folge aus Beispiel 4 in der Koordinatenebene. Wie bezeichnet man den Typ der linearen Transformation g?

6. Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Funktion $z \mapsto z^2 - 0.5$. Man berechne die Fixpunkte von f.

7. Welche der beiden Fixpunkte in Beispiel 6 ist attraktiv/repulsiv?

Bemerkung: wenn ein attraktiver Fixpunkt existiert, dann ist die zu $c = -0.5$ gehörende Julia-Menge zusammenhängend. Siehe `http://classes.yale.edu/fractals/MandelSet/welcome.html` .