9. Übungszettel
Mathematik 1 (Analysis)
Sommersemester 2003

1. Man berechne Stammfunktionen von $f_\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Man verschaffe sich Zugang zu Software, mit der man Stammfunktionen von Funktionen der Art $f(x) = \sin(ax)^5 - \sqrt{e^x + b}$ berechnen kann.

3. Man berechne die Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen $f(x) = x^2 + x + 4$ und $g(x) = 2x^2 + x$ eingeschloßen wird.

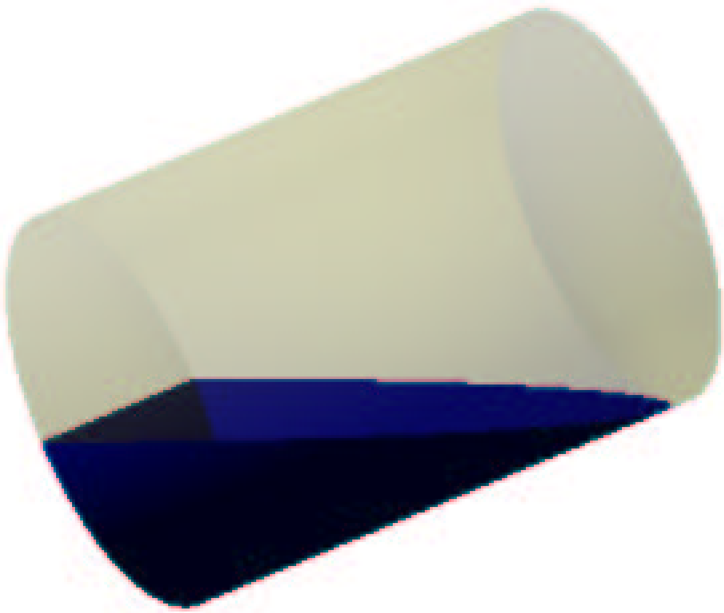
4. Der Graph der Funktion

$$f : [-5, 5] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{169 - x^2} - 10$$

(Kreisbogen) rotiert um die x-Achse. Man berechne das Volumen des Rotationskörpers. (Zur Berechnung sollte ein Programm wie in Beispiel 2 eingesetzt werden, die Stammfunktion ist von Hand schwer zu finden.)

5. Der Rotationskörper in Beispiel 4 ist ein Faß. Man berechne den Radius R_1 der beiden Randscheiben sowie den Radius R_2 des Querschnitts in der Mitte. Man vergleiche das Ergebnis von Beispiel 4 mit der Keplerschen Faßregel $V = \frac{H(2R_2^2 + R_1^2)\pi}{3}$.

6. Ein mit Flüßigkeit gefülltes zylindrisches Glas (Radius der Grundfläche R, Höhe H) steht zuerst auf der xy-Ebene, mit Mittelpunkt im Nullpunkt, und wird dann soweit um die y-Achse gekippt, bis der Flüssigkeitsspiegel in der Höhe der xy-Ebene ist (siehe Abbildung). Man zeige, daß die Ebene $y = y_0$ den von Flüssigkeit ausgefüllten Körper in einem rechtwinkeligen Dreieck mit Seitenlängen $\sqrt{R^2 - y_0^2}$ und $\frac{H}{R}\sqrt{R^2 - y_0^2}$ schneidet.



7. Notation wie in Beispiel 6. Man berechne das Volumen der Flüßigkeit, die sich im Glas befindet, durch Integration der Fläche des rechtwinkligen Dreiecks nach y.