Formale Grundlagen 2

Übungsblatt Nr. 5

auszuarbeiten bis 21. November 2003

Aufgabe 21 *Gegeben sei die Sprache* $L = \{(ab^m)^n \mid m, n > 0\}$ *über dem Alphabet* $\Sigma = \{a, b\}$. *Geben Sie eine explizite Beschreibung (Zustände, Überführungsfunktion) einer einbändigen Turingmaschine* M, *mit* $L(M) = L$.

Aufgabe 22 *Eine Turingmaschine wurde definiert als ein 6-tupel*

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta)$$

wobei $\Sigma \subseteq \Gamma$, $q_0 \in Q$, $F \subseteq Q$ *und* δ *eine pa rtielle Funktion* $Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$ *ist. Ein Produkt zweier Turingmaschinen* $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \Gamma_1, q_{1,0}, F_1, \delta_1)$ *und* $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \Gamma_2, q_{2,0}, F_2, \delta_2)$ *ist ein 6-tupel*

$$M_1 \times M_2 = (Q_1 \times Q_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2, \Gamma_1 \times \Gamma_2, (q_{1,0}, q_{2,0}), F, \delta_1 \times \delta_2)$$

mit $F \subseteq Q_1 \times Q_2$. *Für Paare* $(q_1, \gamma_1) \in Q_1 \times \Gamma_1$ *und* $(q_2, \gamma_2) \in Q_2 \times \Gamma_2$ *im Definitionsbereich von* δ_1 *bzw* δ_2 *mit* $\delta_i(q_i, \gamma_i) = (p_i, g_i, m_i)$ $(i = 1, 2)$ *ist*

$$\delta_1 \times \delta_2(q_1, q_2, \gamma_1, \gamma_2) = (p_1, p_2, g_1, g_2, m_1, m_2).$$

$M_1 \times M_2$ *hat eine natürliche Interpretation als Turingmaschine mit zwei Bändern. Im Falle, dass* $\Sigma_1 = \Sigma_2$, *kann durch Modifikatio n der Überführungsfunktion* $\delta_1 \times \delta_2$ *und bei passender Wahl der Menge* F *der zu akzeptierenden Zustände,* $M_1 \times M_2$ *zum Erkennen boolescher Kombinationen von* $L(M_1)$ *und* $L(M_2)$ *verwendet werden.*
In den folgenden Tabellen sind zwei Turingmaschinen M_1 *und* M_2 *mit* $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \{0, 1\}$ *gegeben.*

M_1	0	1	X	Y	$\sqcup$
p_0	p_1XR	–	–	p_3YR	–
p_1	p_10R	p_2YL	–	p_1YR	–
p_2	p_20L	–	p_0XR	p_2YL	–
p_3	–	–	–	p_3YR	$p_4\sqcup R$
p_4	–	–	–	–	–

M_2	0	1	$\sqcup$
q_0	q_10R	q_21R	–
q_1	–	q_21R	$q_3\sqcup S$
q_2	q_10R	–	$q_3\sqcup S$
q_3	–	–	–

Die Endzustände von M_1 *bzw.* M_2 *sind* p_4 *bzw* q_3.

(a) *Beschreiben Sie die Sprachen* $L(M_1)$ *und* $L(M_2)$.

(b) *Wie sind* M_1 *und* M_2 *zu* M_1' *und* M_2' *zu modifizieren und wie ist* F *für* $M_1 \times M_2$ *festzulegen, so dass* $L(M_1' \times M_2') = L(M_1) \cap L(M_2)$ *gilt.*

(c) *Wie sind* M_1 *und* M_2 *zu* M_1' *und* M_2' *zu modifizieren und wie ist* F *für* $M_1 \times M_2$ *festzulegen, so dass* $L(M_1' \times M_2') = L(M_1) \cup L(M_2)$ *gilt.*

Aufgabe 23 *Gegeben seien zwei Turingmaschinen M_1, M_2. Diskutieren Sie die Konzeption einer Turingmaschine $M_2 \circ M_1$ deren Verhalten die serielle Verknüpfung von M_1 und M_2 simuliert. Welche Möglichkeiten in Bezug auf die Kombination der akzeptierten Sprachen $L(M_1)$, $L(M_2)$ ergeben sich bei geeigneter Modifikation der Überführungsfunktion oder der zu akzeptierenden Zustände?*

Aufgabe 24 *Gegeben sei das Prädikat*

$$P(y, x_1, x_2) \equiv x_1|y \wedge x_2|y.$$

Was wird durch die Funktion $\min_y P(y, x_1, x_2)$ berechnet.

Aufgabe 25 *Zeigen Sie, daß die Funktion f, die durch $f(n)$ = n-te ungerade Zahl ($f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 5$, ...) definiert ist, primitiv rekursiv ist.*
Benutzen Sie zum Beweis lediglich die Definitionen 1.5.1 bis 1.5.4 aus dem Skriptum analog zu Beispiel 1.5.1.