Übungsblatt 11

Besprechung am **16.06.2006.**

Aufgabe 1 Eine Parameterdarstellung der Kardiodie (Herzlinie) ist

$$x(t) = 2\cos t - \cos 2t$$
$$y(t) = 2\sin t - \sin 2t$$

für $0 \le t \le 2\pi$.

a) Ermitteln Sie die Punkte mit horizontaler Tangente ($\dot{x}(t) \neq 0$, $\dot{y}(t) = 0$), mit vertikaler Tangente ($\dot{x}(t) = 0$, $\dot{y}(t) \neq 0$) und die singulären Punkte ($\dot{x}(t) = 0$, $\dot{y}(t) = 0$).

b) Zeigen Sie, dass im Punkt $t = 0$ für den Winkel $\varphi(t)$ des Tangentenvektors mit der positiven x-Achse gilt:

$$\lim_{t\to 0} \tan\varphi(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = 0.$$

Aufgabe 2 Verwenden Sie die Formel von Gauß und Green

$$\frac{1}{2}\int_a^b x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)\,dt$$

für die Fläche des von der (geschlossenen) Kurve $\{(x(t), y(t)) : a \le t \le b\}$ eingeschlossenen Gebiets zur Berechnung der Fläche

a) des Kreises mit Radius R $(x(t) = R\cos(t),\ y(t) = R\sin(t),\ 0 \le t \le 2\pi)$,

b) des von der Kardiode aus Aufgabe 1 eingeschlossenen Gebiets.

Aufgabe 3 Algebraische Kurven.

a) Finden Sie heraus, um welches geometrische Gebilde es sich bei der Nullstellenmenge des Polynoms $f(x, y) = y^2 - x(x^2 - 1)$ handelt, d.h. beschreiben und skizieren Sie die Menge der Punkte

$$V(f) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } f(a, b) = 0\}.$$

Sie können dazu auch das Maple Kommando `plots[implicitplot]` verwenden.

b) Können Sie die Nullstellenmenge als stetige Kurve parametrisieren (zum Beispiel mit Wurzelfunktionen und Fallunterscheidungen)?

Aufgabe 4 Parametrisierung nach Bogenlänge.

a) Berechnen Sie die Parametrisierung nach der Bogenlänge

$$s = L(t) = \int_a^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2}\,d\tau.$$

des Kreises $(x(t) = R\cos(t),\ y(t) = R\sin(t),\ 0 \le t \le 2\pi)$ mit Radius R.

b) Verwenden Sie diese Parametrisierung zur Berechnung der Krümmung nach der Definition als die Änderungsrate des Winkels $\varphi(s)$ in Bezug auf die Bogenlänge, d.h.

$$\kappa(s) = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{ds}\varphi(L^{-1}(s)).$$

Aufgabe 5 Schreiben Sie ein Maple Program das den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{x}}(t)$, den Tangentenvektor $\mathbf{T}(t)$, den Normalvektor $\mathbf{N}(t)$, die Bogenlänge L und die Krümmung $\kappa(t)$ einer zweimal stetig differenzierbaren Kurve, die durch eine Parametrisierung `[x(t),y(t)]` mit `t` im Intervall `[a,b]` gegeben ist, symbolisch berechnet und die Kurve plottet.

Ihre Lösung zu dieser Aufgabe schicken Sie bitte bis zum 15.06.2006 per eMail an Ihren Übungsleiter.