Mathematik 1 (Analysis) **Sommer 2006**

http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ss2006/mathematik1/

Übungsblatt 3

Besprechung am **31.03.2006.**

Aufgabe 1 Komplexe Zahlen.

a) Ermitteln Sie für die folgenden komplexen Zahlen z jeweils $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, \bar{z}$, und $|z|$:

$$z = 3 + 2\mathrm{i}, \quad z = -\mathrm{i}, \quad z = \frac{1+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}, \quad z = 3 - \mathrm{i} + \frac{1}{3-\mathrm{i}}.$$

b) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ dar und skizzieren Sie sie in der komplexen Zahlenebene:

$$z = -1 - \mathrm{i}, \quad z = -5, \quad z = 3\mathrm{i}, \quad z = 2 - 2\mathrm{i}.$$

Aufgabe 2 Untersuchen Sie, ob folgende Folgen konvergieren oder nicht, und geben Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert an:

$$a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}, \qquad b_n = -n + \frac{1}{n}, \qquad c_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n,$$

$$d_n = n - \frac{n^2+3n+1}{n}, \qquad e_n = 1/2\,(\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}), \qquad f_n = \cos(n\pi).$$

Aufgabe 3 Untersuchen Sie die folgenden Reihen mit Hilfe des Majoranten/Minoranten-Kriteriums auf Konvergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Aufgabe 4 Führen Sie einen formalen Nachweis mittels Nullfogen, dass

a) die Potenzfunktionen $x \mapsto x^n$ für $n \in \mathbb{N}$ stetig sind.

b) die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ stetig ist.

Aufgabe 5 Eine Möglichkeit, eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ im Rechner darzustellen, ist die Angabe eines Intervals $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ $(b \geq a)$ und $x \in [a, b]$. Je kleiner dabei die Länge $\varepsilon := b - a$ des Intervals ist, desto genauer ist x beschrieben.

Schreiben Sie in Maple eine Prozedur, die zu gegebenen $x, \varepsilon \in \mathbb{Q}$ mit $\varepsilon > 0$ zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq b - a \leq \varepsilon$ und $\sqrt[3]{x} \in [a, b]$ berechnet. (Als arithmetische Operationen sind dabei nur die Grundrechenarten zu verwenden.)

Ihre Lösung zu dieser Aufgabe schicken Sie bitte bis zum 30.03.2006 per eMail an Ihren Übungsleiter.