Mathematik 1 (Analysis) **Sommer 2006**

http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ss2006/mathematik1/

Übungsblatt 4

Besprechung am **7.4.2006.**

Aufgabe 1 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+k^2}{k^4}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k!}$$

Aufgabe 2 Die parametrisierte Funktion $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stückweise definiert durch

$$f_a : x \mapsto \begin{cases} x, & x < 0 \\ -x^2 + ax + (a^2 - 1), & x \geq 0 \end{cases}.$$

Für welche Parameterwerte von a ist f_a stetig oder differenzierbar? Skizzieren Sie die Funktion in diesen Fällen.

Aufgabe 3 Die reelle Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sei rekursiv gegeben durch

$$a_0 := 1,\ a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right).$$

Zeigen Sie, daß a konvergiert, und bestimmen sie $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 4 Die Dirichlet'sche Sprungfunktion ist definiert als

$$D : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie, daß D nirgends stetig ist.

b) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die bei 0 differenzierbar, aber auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht einmal stetig ist.

Aufgabe 5 Schreiben Sie ein Maple-Programm, das eine gegebene Funktion auf einem gegebenen Intervall numerisch differenziert und die Funktion und ihre erste Ableitung zeichnet. Testen Sie Ihr Programm an den Funktionen

$$f(x) = \cos(x),\ 0 \leq x \leq 6\pi$$

und

$$f(x) = e^{\cos(-3x)},\ 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Hinweis: Ein Rückgabewert von

$$PLOT(CURVES([[x_0, y_0], [x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n]], COLOR(RGB, 0, 0, 1)),$$
$$CURVES([[x'_0, y'_0], [x'_1, y'_1], \ldots, [x'_m, y'_m]], COLOR(RGB, 1, 0, 0)))$$

wird von Maple als Beschreibung zweier Polygonzüge (einer blau, der andere rot) verstanden und gezeichnet.

Ihre Lösung zu dieser Aufgabe schicken Sie bitte bis zum 6.4.2006 per eMail an Ihren Übungsleiter.