Mathematik 1 (Analysis) **Sommer 2006**
http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ss2006/mathematik1/

Übungsblatt 8

Besprechung am **19.05.2006.**

Aufgabe 1 Ein Körper wird mit einer Geschwindigkeit von $10[m/s]$ vom Erdboden senkrecht nach oben geworfen. Ermitteln Sie seine Flughöhe $w(t)$ in Abhängigkeit vom Zeitpunkt t, die maximale Steighöhe, sowie den Zeitpunkt der Wiederkehr.

(*Hinweis:* Integrieren Sie $w''(t) = -g \simeq 9.81[m/s^2]$ zweimal unbestimmt und ermitteln Sie Integrationskonstanten aus den Anfangsbedingungen $w(0) = 0$, $w'(0) = 10$.)

Aufgabe 2 Durch Rotation des Parabelstücks $y = 2\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$ um die x-Achse entsteht ein Paraboloid. Skizzieren Sie es und berechnen Sie

a) sein Volumen,

b) seine Mantelfläche.

Aufgabe 3 Seien $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ Polynomfunktionen mit reellen Koeffizienten, so daß $\deg(p) < \deg(q)$ (Grad der Polynome) und $q(x)$ über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt, d.h. $q(x) = a\prod_{1\leq i\leq r}(x-b_i)^{n_i}$ mit reellen Zahlen a, b_i und ganzen Zahlen $n_i > 0$. Dann existiert eine Partialbruchzerlegung, d.h.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{1\leq i\leq r}\sum_{1\leq j\leq n_i}\frac{c_{i,j}}{(x-b_i)^j}$$

mit reellen Koeffizienten $c_{i,j}$. Überprüfen Sie diese Aussage an folgenden Beispielen:

- $\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{x^2+x+1}{(x-3)(x-4)(x-5)}$
- $\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^3}$

(*Hinweis:* Ansatz auf Hauptnenner bringen und Koeffizienten vergleichen.)

Aufgabe 4 Berechnen Sie Stammfunktionen von

$$f_{a,b,c,r}(x) = \frac{a}{(bx+c)^r}$$

für $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ ganze Zahlen. (Beachten Sie insbesondere den Fall $r = 1$.)

Zeigen Sie, daß sich eine rationale Funktion $p(x)/q(x)$, wobei $q(x)$ über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt (aber nicht notwendigerweise $\deg(p) < \deg(q)$), elementar integrieren läßt. Skizzieren Sie einen Algorithmus.

(*Bemerkung:* Reelle Polynome zerfallen immer in lineare und quadratische Faktoren. Falls in der Faktorisierung von $q(x)$ quadratische Faktoren auftreten, existiert ebenfalls eine elementare Stammfunktion, diese involviert dann aber auch die arctan-Funktion.)

Aufgabe 5 Schreiben Sie ein Maple-Programm, das eine numerische Näherung an das Integral

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x$$

liefert. Verwenden Sie dazu Riemannsummen der Form

$$U_n = \sum_{j=1}^{n} e^{-x_j^2}\Delta x, \quad O_n = \sum_{j=1}^{n} e^{-x_{j+1}^2}\Delta x$$

mit $x_j = j\Delta x$, $\Delta x = 1/n$ und versuchen Sie Δx bzw. n so zu bestimmen, dass $O - U \leq 0.01$ ist, das Ergebnis also auf 2 Stellen genau ist. Vergleichen Sie auch mit dem Maple-Befehl `evalf(sqrt(Pi)/2*erf(1))`. Untersuchen Sie warum tatsächlich

$$U_n \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x \leq O_n$$

gilt und warum die Abweichung vom Wert des Integrals kleiner als $O_n - U_n$ ist.