

# Übungsblatt 9

Besprechung am **02.06.2006**

---

**Aufgabe 1** Berechnen Sie eine Näherung an  $\sqrt{3}$ , indem Sie die Funktion  $f(x) = \sqrt{x}$  bei  $a = 4$  als Taylorreihe um entwickeln und das Restglied vernachlässigen. Wie viele Glieder der Taylorreihe müssen Sie berücksichtigen, um eine Genauigkeit von fünf Dezimalen zu erreichen?

**Aufgabe 2** Bestimmen Sie allgemein den  $n$ -ten Koeffizient  $f_n$  der Taylorreihe  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$  mit Entwicklungspunkt 0 für folgende Funktionen  $f$ :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad f(x) = \log(x+1), \quad f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad f(x) = \arctan(x).$$

(*Beispiel:* Für  $f(x) = \exp(x)$  ist  $f_n = 1/n!$ .)

**Aufgabe 3** Berechnen Sie folgende Grenzwerte mittels Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - x^2}{2 \cos x - 2 + x^2}, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{\sin^2 x}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{\sin^2(3x)}, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (\log(1 - 2x))^2}{1 - \cos(x^2)}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 4** Seien  $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie die Integrationsformel

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

und berechnen Sie mit ihrer Hilfe die folgenden unbestimmten Integrale:

- $\int \log(x)^2 dx$
- $\int \sin(x) \cos(x) dx$
- $\int x^n \log(x) dx$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

**Aufgabe 5** Schreiben Sie eine Maple-Prozedur zur numerischen Integration, die auf der Simpson-Regel beruht. Das Programm soll als Eingabe eine Funktion  $f$ , zwei Intervallgrenzen  $a, b$  und eine natürliche Zahl  $N$  erhalten, die angibt, in wie viele Teilintervalle das Intervall  $[a, b]$  unterteilt werden soll.

Verwenden Sie Ihr Programm zur Berechnung der ersten Nachkommastellen von  $\pi$ . Sie dürfen dazu ohne Beweis die Darstellung

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{x^2+1} dx$$

verwenden. Welche Genauigkeitsveränderung beobachten Sie in Abhängigkeit von  $N$ ?

Ihre Lösung zu dieser Aufgabe schicken Sie bitte bis zum 01.06.2006 per eMail an Ihren Übungsleiter.