Mathematik 1 (Analysis) **Sommer 2006**

http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ss2006/mathematik1/

Übungsklausur

30.06.2006 **Gruppe B**

Beschriften Sie jedes Blatt, das bewertet werden soll, mit Ihrem ***Namen*** *und Ihrer* ***Matrikelnummer****. Verwenden Sie für verschiedene Aufgaben verschiedene Blätter. Formulieren Sie Ihre Lösungen klar und nachvollziehbar. Als Hilfsmittel sind numerische Taschenrechner sowie sämtliche nicht-elektronischen Materialien zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Viel Erfolg!*

Aufgabe 1 a) Ermitteln Sie für die folgende komplexe Zahl $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$, und den Winkel zwischen ihrem Ortsvektor und der positiven reelen Achse in der komplexen Zahlenebene: **5 P.**

$$z = \frac{4}{\sqrt{3} - i}.$$

b) Ist die Hintereinanderausführung von zwei surjektiven Funktionen immer surjektiv? Begründen Sie Ihre Antwort. **5 P.**

Lösung

a) $\mathrm{Re}(z) = \sqrt{3}$, $\mathrm{Im}(z) = 1$, $|z| = 2$, $\arg(z) = \pi/6$

b) Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ surjektiv und $z \in \mathbb{Z}$. Dann existiert wegen Surjektivität von g ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Ferner existiert wegen der Surjektivität von f ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Somit gilt $g(f(x)) = z$, und da z beliebig war, folgt die Surjektivität von $g \circ f$.

Bemerkung: Wenn man allgemeiner Funktionen $f\colon A \to B$ und $g\colon C \to D$ betrachtet (mit $B \subseteq C$), dann läßt sich im Fall $B \subsetneq C$ ein Gegebeispiel konstruieren. Das wurde auch als richtige Lösung anerkannt.

Aufgabe 2 Grenzwert-Berechnungen

a) Berechnen Sie die (eigentlichen und uneigentlichen) Grenzwerte: **4 P.**

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2 - n^2}{n+3}$$

b) Konvergiert die folgende Reihe? Begründen Sie Ihre Antwort. **3 P.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n + 3^n}$$

c) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert. Begründen Sie die Schritte. **3 P.**

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{x-3}{(x-1)(x+1)} \right)$$

Lösung

a) (i) Umformen für $n > 0$:

$$\frac{n^2+2}{n} = n + \frac{2}{n}$$

Dann:

$$\lim_{n\to\infty} n + \frac{2}{n} = \infty$$

(ii) Umformen für $n > 0$:

$$\frac{(n+2)^2 - n^2}{n+3} = \frac{4n+4}{n+3} = \frac{n(4+\frac{4}{n})}{n(1+\frac{3}{n})} = \frac{4+\frac{4}{n}}{1+\frac{3}{n}}$$

Dann:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{4}{n}}{1+\frac{3}{n}} = \frac{4+\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}} = \frac{4+0}{1+0} = 4$$

b) Wegen $2n + 3^n \geq 3^n$ für alle $n \geq 0$ gilt $\frac{1}{2n+3^n} \leq (\frac{1}{3})^n$. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^n$ konvergiert weil $\frac{1}{3} < 1$. Also konvergiert die ursprüngliche Reihe auf Grund des Majorantenkriteriums.

c) Zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} + \frac{x-3}{(x-1)(x+1)} &= \frac{(x+1)+(x-3)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{2}{(x+1)} \end{aligned}$$

Diese Funktion ist stetig und mit der ursprünglichen identisch für $x \neq 1$, man erhält also den Grenzwert durch einsetzen: Grenzwert ist 1.

Aufgabe 3 Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \exp(\sqrt{x})$.

a) Berechnen Sie die erste Ableitung von $f(x)$. **3 P.**

b) Berechnen Sie eine Näherung an $\exp(\sqrt{1/2}) = 2.0281\ldots$, indem Sie die Funktion f bei $x = 1$ durch ihre lineare Approximation ersetzen. Wie genau ist Ihr Resultat? **4 P.**

Hinweis: $\mathbf{e} = \exp(1) = 2.7182\ldots$

c) Können Sie dazu auch die lineare Approximation von f für $x = 0$ verwenden? Begründen Sie Ihre Antwort. **3 P.**

Lösung

a) $f'(x) = \exp(\sqrt{x})/2\sqrt{x}$

b) $a(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = \mathbf{e} + (x-1)\mathbf{e}/2 = \frac{1}{2}\mathbf{e} + \frac{1}{2}\mathbf{e}x$ Für $x = 1/2$ ergibt sich $a(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\mathbf{e} = 2.0387\ldots$ Der Fehler ist also etwa 0.01.

c) Das ist nicht möglich, weil f in $x = 0$ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 4 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > b > 0$ gegeben. Es geht um die Ellipse

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1\right\},$$

die von der Kurve

$$\Gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \mathbf{x}(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} b\sin t \\ a\cos t \end{bmatrix}$$

umlaufen wird.

a) Nach Gauß und Green hat die Fläche der von Γ eingeschlossenen Kurve den Flächeninhalt **3 P.**

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\,dt.$$

Leiten Sie daraus die Flächenformel für die Ellipse in Abhängigkeit von a und b her.

b) Durch Rotation der Ellipse um die x-Achse entsteht ein sogenanntes Rotationsellipsoid. Berechnen Sie dessen Volumen V in Abhängigkeit von a und b. **3 P.**

Hinweis: Es ist hier zweckmäßig, von der impliziten Darstellung E statt von Γ auszugehen.

c) Die Berechnung des Ellipsenumfangs mit der bekannten Formel für die Bogenlänge führt auf ein Integral, das sich nicht in geschlossener Form auswerten läßt. Wie lautet dieses Integral? Leiten Sie aus dem Integral eine Näherungsformel für den Umfang U her, indem Sie den Integrationsbereich $[0, 2\pi]$ in $[0, \pi]$ und $[\pi, 2\pi]$ aufteilen und auf jedes dieser Teilintegrale die Simpsonregel anwenden. **4 P.**

Lösung

a)

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(b\sin(t)(-a\sin(t)) - a\cos(t)b\cos(t)\big)\,dt = -\tfrac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = -\tfrac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} 1\,dt$$
$$= -\tfrac{1}{2}ab[t]_0^{2\pi} = \underline{-ab\pi}$$

b) Aus der impliziten Darstellung erhält man $y = \pm a\sqrt{1 - x^2/b^2}$. Damit:

$$V = \pi\int_{-b}^{b}\Big(a\sqrt{1-\frac{x^2}{b^2}}\Big)^2 dx = \pi a^2\int_{-b}^{b}\big(1 - \frac{x^2}{b^2}\big)\,dx = \pi a^2\Big[x - \frac{x^3}{3b^2}\Big]_{-b}^{b}$$
$$= \pi a^2\big(b - \frac{b^3}{3b^2} - (-b) + \frac{(-b)^3}{3b^2}\big) = \pi a^2\big(b - \tfrac{1}{3}b + b - \tfrac{1}{3}b\big) = \underline{\tfrac{4}{3}\pi b a^2}.$$

c)

$$U = \int_0^{2\pi}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi}\underbrace{\sqrt{b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}}_{=:g(t)}\,dt.$$

Teile Integrationsbereich: $U = U_1 + U_2$ mit

$$U_1 := \int_0^{\pi} g(t)dt, \qquad U_2 := \int_{\pi}^{2\pi} g(t)dt$$

Nach Simpson gilt nun

$$U_1 \approx \tfrac{1}{6}\pi(g(0) + 4g(\pi/2) + g(\pi)) = \tfrac{1}{6}\pi(a + 4b + a)$$
$$U_2 \approx \tfrac{1}{6}\pi(g(\pi) + 4g(3\pi/2) + g(2\pi)) = \tfrac{1}{6}\pi(a + 4b + a),$$

also

$$U = U_1 + U_2 \approx \underline{\tfrac{2}{3}\pi(2b + a)}.$$