Übungsblatt 10

Besprechung am **15.06.2007**.

Aufgabe 1 Eine ebene Kurve sei gegeben durch

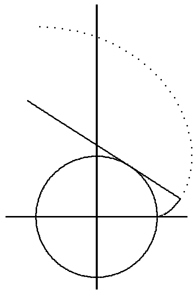
$$\mathbf{x}(t) := t^2 \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie das begleitende Zweibein $(\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t))$ und die Krümmung $\kappa(t)$!

Aufgabe 2 Ein Lineal rollt (ohne zu gleiten) am Kreis mit Radius r

$$\mathbf{k}(t) := r \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t < 2\pi$$

ab. Bestimmen Sie die Bahnkurve desjenigen Punktes des Lineals, der bei $t = 0$ den Kreis berührt. Parametrisieren Sie diese Bahnkurve nach der Bogenlänge um!



Aufgabe 3 Analysieren und erklären Sie den (kinematischen) Verlauf der Kurven

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 - 2t^2 \\ (1 - 2t^2)^2 \end{bmatrix}, \quad -1 \leq t \leq 1,$$
$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos^2 t \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$
$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} t \cos t \\ t^2 \cos^2 t \end{bmatrix}, \quad -2 \leq t \leq 2.$$

Sind diese Kurven geometrisch äquivalent?

Aufgabe 4 Eine differenzierbare Kurve $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ kann mittels $s \mapsto \xi(s) = \mathbf{x}(L^{-1}(s))$ nach der Bogenlänge $s = L(t) = \int_a^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2}\, \mathrm{d}\tau$ umparametrisiert werden. Zeigen Sie: Die Länge des Geschwindigkeitsvektors der umparametrisierten Kurve $\xi(s)$ ist überall gleich 1.

Hinweis: Verwenden Sie Satz 7.25 (Umkehrregel)!

Aufgabe 5 Im Verkehrswegebau wird die Klothoide

$$x(s) = \int_0^s \cos(\sigma^2) d\sigma, \quad y(s) = \int_0^s \sin(\sigma^2) d\sigma$$

als Übergangsstück zwischen Gerade und Kreis verwendet; ihre Krümmung ändert sich proportional zur Bogenlänge. Dies bewirkt, dass ein Fahrer gleichmäßig am Lenkrad drehen kann, bzw. Zugpassagiere nicht einer sprunghaft ansteigenden Fliehkraft ausgesetzt sind. Die obigen Fresnel'schen Integrale lassen sich nur numerisch auswerten, weshalb früher Tabellen benutzt wurden. Berechnen Sie den Kurvenverlauf in Maxima, indem Sie die Integrale mit der Simpsonregel auswerten! Ihre Funktion sollte als Parameter den Wert $s > 0$ und die Anzahl der Teilintervalle nehmen und Listen der x- und y-Koordinaten der Kurvenpunkte ausgeben. Plotten Sie die Kurve auch!

Ihre Lösung zu dieser Aufgabe geben Sie bitte bis zum 14.06.2007 per E-Mail ab.

Aufgabe 6 Gegeben sei die Kurve

$$\Gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \mathbf{x}(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{bmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > b > 0$ (sie beschreibt eine Ellipse).

a) Nach Gauß und Green hat die Fläche der von Γ eingeschlossenen Kurve den Flächeninhalt

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\,dt.$$

Leiten Sie daraus die Flächenformel für die Ellipse in Abhängigkeit von a und b her.

b) Die Berechnung des Ellipsenumfangs mit der bekannten Formel für die Bogenlänge führt auf ein Integral, das sich nicht in geschlossener Form auswerten lässt. Wie lautet dieses Integral? Leiten Sie aus dem Integral eine Näherungsformel für den Umfang U her, indem Sie den Integrationsbereich $[0, 2\pi]$ in $[0, \pi]$ und $[\pi, 2\pi]$ aufteilen und auf jedes dieser Teilintegrale die Simpsonregel anwenden.

Die Lösung zu dieser Aufgabe können Sie schriftlich ausarbeiten und in der nächsten Übungsstunde zur Bewertung abgeben.