Übungsblatt 12

Besprechung am **29.06.2006.**

Die Aufgaben auf diesem Übungsblatt müssen nicht bearbeitet werden, um die volle Punktzahl zu erreichen. Sie können aber durch Bearbeitung dieser Aufgaben nicht bearbeitete Aufgaben von früheren Übungsblättern ausgleichen.

Wir behandeln auf diesem Übungsblatt Bezierkurven. Das sind Kurven, die in der graphischen Datenverarbeitung eingesetzt werden, z. B. in Zeichenprogrammen, Schriftarten, Postscript/PDF oder Computerspielen. Sie zeichnen sich durch große geometrische Flexibilität, einfache Handhabung, schnelle Berechnenbarkeit und geringen Speicherbedarf aus.

Aufgabe 1 Für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 0, \ldots, n$ sind durch

$$b_{k,n}(t) := \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

die *Bernstein-Polynome* definiert. Dabei ist $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ der Binomialkoeffizient. Rechnen Sie nach, daß für die $b_{k,n}(t)$ die Beziehung

$$b_{k,n+1}(t) = t b_{k-1,n}(t) + (1-t) b_{k,n}(t)$$

gilt. Berechnen Sie damit die Bernstein-Polynome $b_{k,n}(t)$ für $n = 0, \ldots, 3$.

Aufgabe 2 Es seien Punkte $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^2$ (oder allgemein: $\mathbb{R}^d$) gegeben. Die Kurve

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = b_{0,n}(t)p_0 + b_{1,n}(t)p_1 + \cdots + b_{n,n}(t)p_n$$

heißt die *Bezierkurve* zu $p_0, \ldots, p_n$. Die Punkte $p_0, \ldots, p_n$ heißen *Kontrollpunkte* zur Bezierkurve γ.

a) Wie sieht eine Bezierkurve mit nur zwei Kontrollpunkten aus?

b) Skizzieren Sie den Verlauf der Bezierkurve mit den Kontrollpunkten

$$p_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

nachdem Sie eine genügende Anzahl von Kurvenpunkten durch Einsetzen spezieller Werte für t bestimmt haben.

c) Geben Sie die Kontrollpunkte einer geschlossenen Bezierkurve an (d. h. einer Kurve, deren Anfangs- und Endpunkt identisch sind.)

Aufgabe 3 Finden Sie Kontrollpunkte p_0, p_1, p_2, p_3, so daß die zugehörige Bezierkurve eine gute Näherung an den Viertelkreis

$$k\colon [0, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2, \quad k(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

ist.

Hinweis: Setzen Sie $p_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ u \end{smallmatrix}\right]$ an, nutzen Sie Symmetrien, und fordern Sie, daß $\frac{1}{2}\sqrt{2}\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ auf der Kurve liegt. Dies sollte eine Gleichung liefern, mit der Sie u bestimmen können.

Aufgabe 4 Seien $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}^2$, sei γ die Bezierkurve mit den Kontrollpunkten p_0, p_1, p_2 und $\tilde{\gamma}$ die Bezierkurve mit den Kontrollpunkten p_2, p_3, p_4. Weiter sei ρ die Kurve, die durch Aneinanderhängung von γ und $\tilde{\gamma}$ entsteht.

Zeigen Sie: Wenn p_1, p_2, p_3 auf einer Geraden liegen, dann ist ρ differenzierbar (also knickfrei) in p_2.

Aufgabe 5 Kurvenpunkte von Bezierkurven können mit dem Algorithmus von de Casteljau effizient berechnet werden. Um den Kurvenpunkt für ein bestimmtes $t \in [0,1]$ zu berechnen, kombiniert man aus den Kontrollpunkten $p_0, p_1, \ldots, p_n$ neue Punkte $p'_0, p'_1, \ldots, p'_{n-1}$ durch

$$p'_i = (1-t)p_i + tp_{i+1}.$$

Diese Punkte kombiniert man in gleicher Weise zu neuen Punkten $p''_0, p''_1, \ldots, p''_{n-2}$ usw. bis nur noch ein Punkt $p_0^{''\cdots'}$ übrig bleibt. Dieser ist dann der Kurvenpunkt zum gewählten t.

Implementieren Sie in Maxima eine Funktion `bezier`, die eine Liste von Kontrollpunkten und ein $t \in [0,1]$ als Argument nimmt und nach de Casteljau den entsprechenden Punkt der Bezierkurve berechnet.

Hinweis: Auf der Homepage finden Sie eine Prozedur `plotBezier` zum Zeichnen von Bezierkurven, die `bezier` aufruft.

Ihre Lösung zu dieser Aufgabe schicken Sie bitte bis zum 28.06.2007 per eMail an Ihren Übungsleiter.

Aufgabe 6 Zu $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^2$ heißt

$$KH(p_0, \ldots, p_n) := \left\{ b_0p_0 + \cdots + b_np_n : 0 \leq b_i \leq 1, b_0 + \cdots + b_n = 1 \right\}$$

die konvexe Hülle. Zeigen Sie, daß jede Bezierkurve in der konvexen Hülle ihrer Kontrollpunkte liegt.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis den Binomischen Lehrsatz $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$.

Die Lösung zu dieser Aufgabe können Sie schriftlich ausarbeiten und in der nächsten Übungsstunde zur Bewertung abgeben.

Sie können die Lehrveranstaltung über die Umfragefunktion im KUSSS bewerten.
Bitte machen Sie von dieser Möglichkeit Gebrauch.

Schöne Ferien!