Übungsblatt 3

Besprechung am **30.03.2007.**

Aufgabe 1 Untersuchen Sie, ob folgende Folgen konvergieren oder nicht, und geben Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert an:

$$a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}, \qquad b_n = -n + \frac{1}{n}, \qquad c_n = \left(-\frac{1}{n}\right)^n,$$
$$d_n = n - \frac{n^2+3n+1}{n}, \qquad e_n = 1/2\,(\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}), \qquad f_n = \cos(n\pi).$$

Aufgabe 2 Untersuchen Sie die folgenden Reihen mit Hilfe des Majoranten/Minoranten-Kriteriums auf Konvergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Aufgabe 3 Begründen Sie, dass die Polynomfunktion $f(x) = x^3 - c$ für $c \geq 0$ im Intervall $[0, c+1]$ genau eine Nullstelle. Finden Sie für negatives c ein Intervall $[a, 0]$ in dem die Polynomfunktion f genau eine Nullstelle hat.

Aufgabe 4 Führen Sie einen formalen Nachweis mittels Nullfogen, dass

a) die Potenzfunktionen $x \mapsto x^n$ für $n \in \mathbb{N}$ stetig sind.

b) die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ stetig ist.

Aufgabe 5 Eine Möglichkeit, eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ im Rechner darzustellen, ist die Angabe eines Intervals $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ $(b \geq a)$ und $c \in [a, b]$. Je kleiner dabei die Länge $\varepsilon := b - a$ des Intervals ist, desto genauer ist c beschrieben.

Schreiben Sie in Maxima eine Prozedur, die zu gegebenen $c, \varepsilon \in \mathbb{Q}$ mit $\varepsilon > 0$ zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq b - a \leq \varepsilon$ und $\sqrt[3]{c} \in [a, b]$ berechnet. (Als arithmetische Operationen sind dabei nur die Grundrechenarten zu verwenden.) *Hinweis.* Verwenden Sie Aufgabe 3.

Ihre Lösung zu dieser Aufgabe schicken Sie bitte bis zum 29.03.2007 per eMail an Ihre(n) ÜbungsleiterIn.