Mathematik 1 (Analysis) **Sommer 2007**
http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ss2007/mathematik1/

Übungsblatt 6

Besprechung am **11.05.2007**.

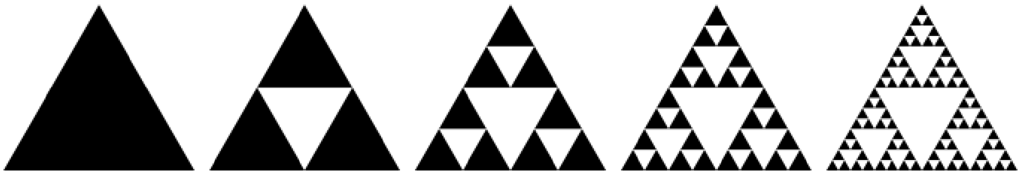
Aufgabe 1 Berechnen Sie eine Näherung an $\sqrt{34}$, indem Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ bei $x = 36$ durch ihre lineare Approximation ersetzen. Wie genau ist Ihr Resultat?

Aufgabe 2 Um das Kryptosystem RSA zu knacken, müssen sehr große Zahlen faktorisiert werden. Die Tabelle enthält Daten eines Experiments, bei dem relativ (!) kleine Zahlen faktorisiert wurden: x_i ist die Anzahl der Dezimalstellen und t_i die dafür benötigte Rechenzeit in Sekunden.

x_i	41	43	46	47	50	52	54	56
t_i	0.7	1.3	3.9	5.2	18.1	26.8	36.7	68.2
$y_i = \log(t_i)$	-0.34	0.28	1.36	1.64	2.89	3.29	3.60	4.22

Der lineare Zusammenhang zwischen x_i und y_i soll mittels linearer Regression modelliert werden. Wie Sie aus der Vorlesung wissen, verläuft die Regressionsgerade genau durch den Schwerpunkt $\left(\frac{1}{n}\sum x_i, \frac{1}{n}\sum y_i\right)$. Verschieben Sie die Daten entsprechend und nehmen Sie eine lineare Regression durch den Ursprung vor. Nutzen Sie diese, um abzuschätzen, wie lange der Computer des Experiments brauchen würde, um einen der heute üblichen 4096-Bit-Schlüssel (also eine Binärzahl mit 4096 Stellen — wie viele Dezimalstellen sind das?) zu knacken!

Aufgabe 3 Die Ausgangsfigur A_0 für die Konstruktion des Sierpinski-Dreiecks ist ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1. Das Bildungsgesetz für den Übergang von A_n auf A_{n+1} lautet: Verbinde die Mittelpunkte der Seiten jedes Dreiecks von A_n und entferne das mittlere der vier dadurch entstehenden Teildreiecke:



Bestimmen Sie die fraktale Dimension des Sierpinski-Dreiecks A_∞!

Aufgabe 4 Gegeben seien positive reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$. Zu zeigen ist, dass der k-te Potenzmittelwert $M_k = \sqrt[k]{\frac{x_1^k + \cdots + x_n^k}{n}}$ im Limes $k \to 0$ zum geometrischen Mittel $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$ wird.
Hinweis: Beginnen Sie mit $\lim\limits_{k\to 0} \log(M_k)$ und wenden Sie die Regel von l'Hôpital (s. Aufgabe 6) an!

Aufgabe 5 Implementieren Sie das Newton-Verfahren in Maxima und testen Sie es:

a) Finden Sie die reellen Nullstellen der Funktion $f(x) = x^5 - 4x - 1$.

b) Versuchen Sie mit Ihrem Programm, die einzige Nullstelle der (stetigen und differenzierbaren!) Funktion $f(x) = e^{-1/x^2}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ zu approximieren. Warum gelingt dies nicht (bzw. nur sehr schlecht)?

c) Finden Sie ein Beispiel, in dem das Newton-Verfahren oszilliert!

Ihre Lösung zu dieser Aufgabe geben Sie bitte bis zum 10.05.2007 per E-Mail ab.

Am 4. Mai finden keine Übungen statt; damit Ihnen in der Zwischenzeit nicht langweilig wird, gibt es folgendes

Bonusproblem zum Knobeln (optional): Ein Seil umspannt die Erde (eine Kugel mit Radius $r = 6378$ km) genau, d.h. es hat die Länge $2\pi r$. Nun wird dieses Seil um 1 m verlängert und an einer Stelle in die Höhe gehoben, bis es straff ist. Wie weit ist dies möglich? Leiten Sie eine Gleichung für diese Entfernung her und lösen diese numerisch mit dem Newton-Verfahren!

Aufgabe 6 Viele Grenzwerte, die auf einen unbestimmten Ausdruck (salopp $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$) führen, lassen sich mit der Regel von l'Hôpital berechnen. Diese ist wie folgt definiert:

Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$, jeweils von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, seien differenzierbar in einem gelochten offenen Intervall $I = (a,b)\backslash\{x_0\}$ (zugelassen sind auch $a = x_0 = -\infty$ und $b = x_0 = \infty$) und die Grenzwerte $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)$ seien entweder beide 0 oder beide $\pm\infty$. Ferner gelte, dass $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin(x))^2 - x^2}{\cos(2x) - 4\cos(x) + 3}$ mit Hilfe von l'Hôpital!

b) Warum darf die Regel von l'Hôpital nicht auf

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(2x) - 2x}{e^{\cos(x)}(\cos(x)\sin(x) - x)}$$

angewendet werden? Erschließen Sie sich durch Hinschauen das Grenzverhalten dieses Ausdrucks, und demonstrieren Sie, dass die Anwendung von l'Hôpitals Regel hier ein falsches Ergebnis liefert!

Die Lösung zu dieser Aufgabe können Sie schriftlich ausarbeiten, und in der nächsten Übungsstunde zur Bewertung abgeben.