Mathematik 1 (Analysis) **Sommer 2007**
http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ss2007/mathematik1/

Übungsblatt 8

Besprechung am **01.06.2007.**

Aufgabe 1 Berechnen Sie näherungsweise $\int_0^1 \sin\left(x^2\right) dx$, indem Sie das Taylorpolynom vom Grad 14 einsetzen. Kann man dieses Integral auch exakt ausrechnen?

Aufgabe 2 Bestimmen Sie allgemein den n-ten Koeffizienten f_n der Taylorreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ für folgende Funktionen f:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \qquad f(x) = \log(x+1), \qquad f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \qquad f(x) = \arctan(x).$$

Beispiel: Für $f(x) = e^x$ ist $f_n = 1/n!$.

Aufgabe 3 Berechnen Sie folgende Grenzwerte mittels Taylorentwicklung:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x - x^2}{2\cos x - 2 + x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1 - 2x}{\sin^2 x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(\log(1-2x)\right)^2}{1-\cos(x^2)}.$$

Aufgabe 4 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f stetig ist, und bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung in $x = 0$. Argumentieren Sie, dass man auch die Ableitung n-ter Ordnung berechnen kann. Berechnen Sie die Taylorreihe um den Nullpunkt und vergleichen Sie diese mit der Funktion selbst.

Aufgabe 5 Schreiben Sie eine Funktion in Maxima, die ein gegebenes Polynom

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

für vorgegebenes c in die Form

$$b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \cdots + b_n(x-c)^n$$

umwandelt.
Das Programm schicken Sie bitte bis zum 31.05.2007 per eMail an Ihre(n) ÜbungsleiterIn.

Aufgabe 6 Die Funktion y, die durch die folgende Gleichung gegeben ist, beschreibt die Intensitätsverteilung des Lichts in einem Regenbogen:

$$y''(x) = x \cdot y(x)$$
$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

Angenommen diese Funktion besitzt eine Taylorreihe

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Gleichung die Taylorpolynome 6-ten und 12-ten Grades. Zeichnen Sie diese mit Maxima.
Die Lösung zu dieser Aufgabe können Sie schriftlich ausarbeiten und in der nächsten Übungsstunde zur Bewertung abgeben.