Name: .....

Matr.Nr.: .....

Stud.Kennz.: .....

Klausur
"Lineare Algebra II für Physiker(innen)" (326046)
10.5.2008

Bitte folgendes beachten:

- *Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.*
- *Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.*
- *Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.*
- *Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.*

Alle Antworten sind zu begründen; ein simples "ja/nein" reicht nicht.

(1) Zeigen Sie: *Hat die Matrix* $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *verschiedene Eigenwerte* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, *dann gibt es eine Basis* $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ *von* $\mathbb{R}^n$, *sodass jedes Basiselement ein Eigenvektor von* A *ist.*

(2) Sei A eine reelle 3×3 Matrix, und f die folgende lineare Abbildung vom Spaltenraum $\mathbb{R}_3$ nach $\mathbb{R}_3$:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_3 \\ & x & \mapsto & A \cdot x \end{array}$$

Gibt es für die Matrizen in (a) und (b) eine geordnete Basis B von $\mathbb{R}_3$ bzgl. derer die Darstellungsmatrix von f eine Diagonalmatrix ist? Wenn ja, wie sieht so eine Basis aus?

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

bitte umblättern

(3) (a) Geben Sie Definitionen für das charakteristische Polynom und für das Minimalpolynom einer quadratischen Matrix A. Wie hängen charakteristisches Polynom und Minimalpolynom zusammen?

(b) Bestimmen sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom der Matrix A aus Aufgabe (2b).

(4) Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ zusammen mit dem kanonischen inneren Produkt $\langle x|y\rangle$.

(a) Bestimmen Sie mittels des Gram-Schmidt Orthonormalisierungsprozesses eine Orthonormalbasis $C = (y_1, y_2, y_3)$ für den von

$$x_1 = (1,1,1,1),\ x_2 = (1,0,1,0),\ x_3 = (0,-1,0,1)$$

aufgespannten Teilraum W.

(b) Bestimmen Sie dasjenige $w \in W$, welches dem Vektor $u = (1,2,2,1)$ am nächsten ist.

(5) Betrachten Sie die symmetrische Bilinearform

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) & \mapsto & (x_1,x_2)\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Sei q die zu f gehörige quadratische Form auf $\mathbb{R}^2$.

(a) Ist q positiv oder negativ definit?

(b) Bestimmen Sie das Maximum von q auf dem Kreis. Für welche (x_1, x_2) wird dieses Maximum angenommen?