F.Winkler, LA-II, SS 2008

Gruppe a

Name: .....

Matr.Nr.: .....

Stud.Kennz.: .....

Klausur
"Lineare Algebra und Analytische Geometrie II" (326001)
28.6.2008

Bitte folgendes beachten:

- *Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.*
- *Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.*
- *Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.*
- *Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.*

Alle Lösungen sind zu begründen !

(1) Sei $V = C([0,1],\mathbb{R})$ der reelle Vektorraum der stetigen Funktionen von $[0,1]$ in $\mathbb{R}$. Auf $V \times V$ betrachten wir die Abbildung

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 fg\,dx.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\langle .|. \rangle$ ein Skalarprodukt auf V ist.
(b) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis für den Teilraum $W = \mathrm{span}(1, x, x^2)$.
(c) Bestimmen Sie die beste Approximation zu x^4 in W, also dasjenige $w \in W$ für welches gilt:

$$\forall w' \in W : \parallel x^4 - w \parallel \leq \parallel x^4 - w' \parallel \quad .$$

(2) Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_3 \\ & (x,y,z)^T & \mapsto & (5x+y-z, 2y, 3x+y+z)^T \ . \end{array}$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom c_f und das Minimalpolynom m_f dieser Abbildung.
(b) Bestimmen Sie eine Zerlegung von $\mathbb{R}^3$ in eine direkte Summe f-invarianter Teilräume.

(3) Bestimmen Sie die Jordan-Matrix der linearen Abbildung f aus Aufgabe (2).

(4) Gegeben sei die Menge

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1 \ \wedge \ x+y \leq 1 \ \wedge \ x-y \leq 1 \ \}$$

(a) Zeigen Sie, dass S konvex ist.
(b) Bestimmen Sie die Extrempunkte von S.
(c) Stellen Sie den Punkt $P = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dar als beschränkte Linearkombination von Extrempunkten.

(5) Für ein Polynom $p = p_n x^n + \cdots + p_1 x + p_0$ über dem Körper K sei $\mathrm{polfun}(p) = \overline{p}$ die zugehörigie Polynomfunktion, also

$$\begin{array}{rccc} \overline{p}: & K & \longrightarrow & K \\ & a & \mapsto & p(a) = p_n a^n + \cdots + p_1 a + p_0 \ . \end{array}$$

Zeigen Sie:
(a) Die Menge der Polynomfunktionen über K ist ein Vektorraum über K.
(b) Die Abbildung $\mathrm{polfun}: p \mapsto \overline{p}$ vom Vektorraum der Polynome in den Vektorraum der Polynomfunktionen ist linear.
(c) polfun ist genau dann ein Vektorraum-Isomorphismus, wenn der Körper K unendlich ist.

(6) Gegeben seien die Polynome

$$f(x,y) = xy - 2y - x + 2, \quad g(x,y) = xy - y + x - 1$$

(a) Bestimmen Sie die Resultante von f und g bzgl. der Variablen y.
(b) Bestimmen Sie alle gemeinsamen komplexen Nullstellen von f und g.

(7) Erklären Sie den Begriff der "Gröbnerbasis":
geben Sie eine Definition einer Gröbnerbasis,
wofür ist eine Gröbnerbasis eine Basis, und in welchem Sinn?