Übungsblatt 1

Besprechung am **07.03.2008**

Aufgabe 1 Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen. Variieren Sie die Methoden und verwenden Sie jeweils die Definition, die Laplace-Entwicklung nach eine Zeile bzw. Spalte und triangularisieren Sie eine der Matrizen.

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

(d) $A = (a_{i,j}) \in Mat_{4\times 4}(\mathbb{R})$mit Einträge $a_{i,j} = (-1)^{i+j}$.

Aufgabe 2 Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungssysteme an. Benutzen Sie sowohl die Cramersche Regel als auch das Gauss Verfahren.

(a) $\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{array} \right.$ (b) $\left\{ \begin{array}{l} 2x + z + w = 5 \\ y - w = -1 \\ 3x - z - w = 0 \\ 4x + y + 2z + w = 9 \end{array} \right.$ (c) $\left\{ \begin{array}{l} 2\sin x - \cos y + 3\tan z = 3 \\ 4\sin x + 2\cos y - 2\tan z = 10 \\ 6\sin x - 3\cos y + \tan z = 9 \end{array} \right.$

Aufgabe 3 (a) Berechnen Sie die Adjungierte der Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

(b) Gilt es dann allgemein, dass die Inverse einer nichtsingulären rechten oberen Dreieckmatrix wiederum eine Dreieckmatrix ist?

Aufgabe 4 Beweisen Sie dass eine Funktion $f : V^n \to \mathbb{R}$ multilinear ist g.d.w. für alle Vektoren $v, w \in V$ und Skalare $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(\rho_1, \ldots, k_1 v + k_2 w, \ldots, \rho_n) = k_1 f(\rho_1, \ldots, v, \ldots, \rho_n) + k_2 f(\rho_1, \ldots, w, \ldots, \rho_n).$$

Aufgabe 5 (a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{vmatrix} x-2 & x-3 & x-4 \\ x+1 & x-1 & x-3 \\ x-4 & x-7 & x-10 \end{vmatrix} = 0.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Determinante einer beleibigen $n \times n$ Matrix gebildet aus dem gekippten Pascal Dreieck gleich 1 ist.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots \\ 1 & 3 & \ldots & \\ 1 & \ldots & & \\ \ldots & & & \end{pmatrix}$$