Übungsblatt 3

Besprechung am **4.04.2008**

Aufgabe 1 Gegeben sei ein Skalar λ. Finden Sie das Minimalpolynom der Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & -4 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $y'(t) = Ay(t)$ wobei die Matrix A ist:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3 Sei wieder $\mathcal{P}_n$ der Vektorraum aller Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad maximal n. Finden Sie das Minimalpolynom der folgenden Abbildungen:
(a) $t : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ definiert als $p(x) \mapsto p(x+1)$,
(b) der Ableitungsoperator $\frac{d}{dx} : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$,
(c) die Projektion auf den ersten zwei Koordinaten $\pi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$.

Aufgabe 4 (a) Sei P eine reguläre $n \times n$ Matrix. Zeigen Sie, dass die Abbildung $t_P : Mat_{n\times n} \to Mat_{n\times n}$ gegeben durch $T \mapsto PTP^{-1}$ ein Isomorphismus[1] ist.
(b) $A, B \in Mat_{n\times n}$ sind zwei ähnliche Matrizen g.d.w. es eine reguläre Matrix P gibt s.d. $t_P(A) = B$. Argumentieren Sie wieso zwei ähnliche Matrizen dieselben Eigenwerte besitzen.
(c) Seien A und B ähnliche Matrizen. Beweisen Sie dass $f(A) = f(B)$ wobei f ein beliebiges Polynom ist. Untersuchen Sie anhand dieser Eigenschaft die Ähnlichkeit der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (a) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\left\{e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{r_1-1}e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, x^{r_2-1}e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_k x}, \dots, x^{r_k-1}e^{\lambda_k x}\right\}$$

mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ und $r_i \in \mathbb{N}$ linear unabhängig sind.

Hinweis: Es genügt zu zeigen $\left(\sum\limits_{j=1}^{k} e^{\lambda_j x} p(x) = 0, x \in \mathbb{R}\right) \implies (p_j \equiv 0, j \in \{1, \dots, k\})$

für beliebige $p_j \in \mathcal{P}_n$, $j \in \{1, \dots, k\}$.

(b) Sei A eine beliebige $n \times n$ Matrix. Zeigen Sie: $\left(e^A\right)^k = e^{kA}$ für $k \in \mathbb{Z}$.
Hinweis: $e^x = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n$.

---

[1] d.h. eine lineare und bijektive Abbildung