Lineare Algebra 2 für Physiker(innen) **Sommer 2008**
http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ss2008/la/

Übungsblatt 4

Besprechung am **11.04.2008**

Aufgabe 1 Seien u, v, w aus dem inneren Proktraum V so dass

$$\langle u, v\rangle = 2,\ \langle v, w\rangle = -3,\ \langle u, w\rangle = 5,\ \|u\| = 1,\ \|v\| = 2 \text{ und } \|w\| = 7.$$

Berechnen Sie folgendes:

a) $\langle u + v, v + w\rangle$ b) $\langle 2v - w, 3u + 2w\rangle$ c) $\langle u - v - 2w, 4u + v\rangle$
d) $\|u + v\|$ e) $\|2w - v\|$ f) $\|u - 2v + 4w\|$

Aufgabe 2 Zeigen oder wiederlegen Sie die fogenden Aussagen:

(a) $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|$ g.d.w. einer der Vektoren $u, v \in V$ das skalare Mehrfache des anderen ist.
(b) Aus $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle$ und $u \neq 0$ folgt $v = w$.
(c) $w = \frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|}$ halbiert den Winkel gebildet von den Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n$.
(d) $\|u\| = \|v\|$ g.d.w. die Vektoren $u - v$ und $u + v$ senkrecht zueinander liegen.
(e) Jeder Vektor aus $\mathbb{R}^n$ gehört zu einer orthogonalen Basis.
(f) Die Spalten einer Matrix A bilden eine orthonormale Basis g.d.w. die Inverse dieser Matrix gleich mit der Transponierten A^T ist.

Aufgabe 3 (a) Zeigen Sie dass die Vektoren $u_1 = (0, 2, 1, 0), u_2 = (1, -1, 0, 0), u_3 = (1, 2, 0, -1)$ and $u_4 = (1, 0, 0, 1)$ eine Basis für $\mathbb{R}^4$ bilden und benutzen Sie das Gram-Schmidt Verfahren um daraus eine orthogonale Basis zu berechnen.
(b) Finden Sie eine orthonormale Basis des folgenden Unterraumes von $\mathbb{R}^4$:

$$\{(x, y, z, w) : x - y - z + w = 0, x + z = 0\}$$

Aufgabe 4 (a) Beweisen Sie die Verallgemeinerung der Dreiecks-Ungleichung:
Für beliebige Vektoren $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^k$ gilt

$$\|u_1 + \cdots + u_n\| \leq \|u_1\| + \cdots + \|u_n\|.$$

(b) Beweisen Sie die Lagrange Identität für $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$:

$$\left(\sum_{1\leq j\leq n} a_j b_j\right)^2 = \left(\sum_{1\leq j\leq n} a_j^2\right)\left(\sum_{1\leq j\leq n} b_j^2\right) - \left(\sum_{1\leq j<k\leq n} a_k b_j - a_j b_k\right)^2$$

und leiten Sie aus dieser die Cauchy-Schwarz Ungleichung in $\mathbb{R}^n$ ab.

Aufgabe 5 (a) Ein Schiff segelt mit Geschwindigkeit in Richtung v_1. Gemessen am Mast, ist die Richtung und Geschwindigkeit des Windes durch den Vektor a gegeben. Ändert sich die Richtung und Geschwindigkeit des Schiffes von v_1 zu v_2 so ergibt die relative Messung des Windes einen Vektor b. Finden Sie die absolute Geschwindigkeit der Windes.

(b) Berechnen Sie im Grenzwert $n \to \infty$ die Grösse des Winkels gebildet von der Diagonale des Einheitswürfels in $\mathbb{R}^n$ mit einer der Koordinatenachsen.