Lineare Algebra 2 für Physiker(innen) **Sommer 2008**
http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ss2008/la/

Übungsblatt 5

Besprechung am **18.04.2008**

Aufgabe 1 Finden Sie die Projektion des Vektors v auf M parallel zu N:

a) $v = (3, -2)$, $M = \{(x, y) : x + y = 0\}$, $N = \{(x, y) : -x - 2y = 0\}$;
b) $v = (1, 2)$, $M = \{(x, y) : x - y = 0\}$, $N = \{(x, y) : 2x + y = 0\}$;
c) $v = (3, 0, 1)$, $M = \{(x, y, z) : x + y = 0\}$, $N = \{c \cdot (1, 0, 1) : c \in \mathbf{R}\}$.

Aufgabe 2 Finden Sie das orthogonale Komplement $M^\perp$ von:

a) $M = \{(x, y) : -2x + 3y = 0\}$;
b) $M = \{(x, y, z) : -x + 3y + z = 0\}$;
c) $M = \{(x, y, z) : y + z = 0 \quad und \quad x = 0\}$.

Aufgabe 3 Seien M, N Unterräume von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) $\left(M^\perp\right)^\perp = M$;
b) $(M + N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$;
c) $N \subseteq M \Longrightarrow N^\perp \subseteq M^\perp$;
d) $dim(M) + dim(M^\perp) = n$;
e) Die Abbildung p ist die Projektion auf M parallel zu N g.d.w. $1_{\mathbb{R}^n} - p$ die Projektion auf N parallel zu M ist.

Aufgabe 4 Im IP-Raum $(\mathcal{C}[0, 2\pi], \mathbb{R})$ finden sie die Fourier-Koeffizienten der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi \\ 0, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi \\ -1, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$ c) $f(x) = x$.

Aufgabe 5 Zeigen Sie dass die Legendre Polynome $1, x, x^2 - \frac{1}{3}$ orthogonal im IP-Raum $(\mathcal{C}[-1, 1], \mathbb{R})$ sind. Schreiben Sie die Funktion $f(x) = 2x^2$ als Linearkombination dieser und finden Sie $c \in \mathbb{R}$ so dass $x^3 - cx$ orthogonal zu den ersten drei Legendre Polynomen liegt.

Aufgabe 6 Zeigen Sie dass die Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{C}[\mathbb{R}] \to \mathcal{C}[\mathbb{R}]$ die einer Funktion $f(t)$ ihre Fourier-Transformierte $\tilde{f}(\omega)$ zuweist linear ist und folgende Eigenschaften erfüllt:

a) $f(at) \mapsto \frac{1}{|a|}\tilde{f}(\frac{\omega}{c})$,
b) $f'(t) \mapsto i\omega\tilde{f}(\omega)$,
c) $f(t + t_0) \mapsto e^{i\omega t_0}\tilde{f}(\omega)$
d) $f(t)g(t) \mapsto \tilde{h}(\omega)$ wobei $\tilde{h}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\tau)\tilde{g}(\omega - \tau)d\tau$.