Lineare Algebra 2 für Physiker(innen) **Sommer 2008**
http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ss2008/la/

Übungsblatt 6

Besprechung am **28.03.2008**

Aufgabe 1 (a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = (a_{i,j}) \in Mat_{4\times 4}(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft dass $a_{i,j} = i + j$ für alle $0 \leq i, j \leq 4$.

(b) Geben Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssysteme an.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y + z + 2w = 4 \\ y + w = 0 \\ 2z + w = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + 2b + 3c + d - e = 1 \\ 3a - b + c + d + e = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \quad - z \quad = 1 \\ y + 2z - w = 3 \\ x + 2y + 3z - w = 7 \end{cases}$$

Aufgabe 2 (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die dazu gehörigen Eigenräume der Abbildung $t : Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definiert als $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}$.

(b) Zeigen Sie, dass λ ein Eigenwert der $n \times n$ Matrix T ist genau dann wenn die Abbildung mit Darstellungsmatrix $T - \lambda I$ kein Isomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie, dass eine quadratische reelle Matrix mit einer ungeraden Anzahl von Reihen hat mindestens einen reellen Eigenwert.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie das minimale Polynom der folgenden Matrizen.

(a) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ (a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4 (a) Seien W_1, W_2, W_3 Unterräume eines Vektorraumes V. Zeigen Sie dass

$$(W_1 \cap W_2) + (W_1 \cap W_3) \subseteq W_1 \cap (W_2 + W_3) .$$

(b) Zeigen Sie dass im Vektorraum der Polynome $\mathcal{P}_n$ die Unterräume

$$\mathcal{E} := \{p \in \mathcal{P}_n : p(-x) = p(x) \quad \forall x\}$$
$$\mathcal{O} := \{p \in \mathcal{P}_n : p(-x) = -p(x) \quad \forall x\}$$

komplementär sind.

(c) Sei $V = V_1 \oplus V_2$ und f Isomorphismus zwischen V und einen Raum U. Zeigen Sie dass $U = f(V_1) \oplus f(V_2)$.

Aufgabe 5 (a) Sei $\mathcal{P}$ der unendlich dimensional Raum aller Polynomen vom endlichen Grad. Zeigen Sie dass die gewöhnliche Ableitung $\frac{d}{dx} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ und der Shiftoperator $s : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ gegeben durch

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mapsto a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^{n+1}$$

untereinander nicht kommutieren. Statt dessen gilt $\frac{d}{dx} \circ s - s \circ \frac{d}{dx} = 1_{\mathcal{P}}$.

(b) Eine Person die nach Osten mit $3km/h$ geht spührt den Wind aus dem Norden. Bei einer doppelten Geschwindigkeit scheint aber der Person als wehe der Wind aus Nord-Osten. Welche ist die eigentliche Geschwindigkeit der Windes?