Satz 12.17: *Sei S eine beschränkte abgeschlossene konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann enthält jede unterstützende Hyperebene von S einen Extrempunkt.*

Beweis: Sei

$$H \;=\; \{x \mid \langle N|x\rangle = \langle N|P_0\rangle\}$$

eine unterstützende Hyperebene von S bei P_0. O.B.d.A. gelte

$$\langle N|x\rangle \geq \langle N|P_0\rangle \quad \forall x \in S.$$

Sei

$$T \;:=\; S \cap H \;.$$

Dann ist T nicht leer, konvex, abgeschlossen, und beschränkt. Wir zeigen zunächst:

(*) *ein Extrempunkt von T ist auch ein Extrempunkt von S.*

Somit brauchen wir dann nur mehr einen Extrempunkt von T zu finden. Sei also P ein Extrempunkt von T, der aber kein Extrempunkt von S ist. D.h. es gibt verschiedene $Q_1, Q_2 \in S$, nicht beide in T, sodass P geschrieben werden kann als

$$P \;=\; tQ_1 + (1-t)Q_2, \quad \text{für } 0 < t < 1 \;.$$

Daraus erhalten wir einerseits (weil $P \in H$)

$$\langle N|P_0\rangle = \langle N|P\rangle = t\langle N|Q_1\rangle + (1-t)\langle N|Q_2\rangle \quad (1)$$

und andererseits, da nicht beide Q_1, Q_2 in T liegen können,

$$\langle N|P_0\rangle = t\langle N|P_0\rangle + (1-t)\langle N|P_0\rangle < t\langle N|Q_1\rangle + (1-t)\langle N|Q_2\rangle \quad (2) \;.$$

(1) und (2) sind offensichtlich ein Widerspruch. Somit kann es keine solchen Punkte Q_1, Q_2 geben, P muss also auch ein Extrempunkt von S sein. Damit haben wir (*) bewiesen.

Wir suchen nun einen Extrempunkt von T. Wir projezieren T auf die erste Komponente. $\pi_1(T)$ ist abgeschlossen, konvex und beschränkt. Wir setzen

$$T_1 \;:=\; \{x \in T \mid \pi_1(x) \leq \pi_1(y)\ \forall y \in T\}.$$

Diese Menge T_1 ist nicht leer, abgeschlossen und beschränkt. Es gibt also einen Punkt in T_1, welcher unter allen Punkten in T_1 die kleinste zweite Komponente hat.

$$T_2 \;:=\; \{x \in T_1 \mid \pi_2(x) \leq \pi_2(y)\ \forall y \in T_1\}.$$

Auch T_2 ist nicht leer, abgeschlossen und beschränkt. Auf diese Weise können wir fortfahren, und schliesslich erhalten wir

$$T_n \;:=\; \{x \in T_{n-1} \mid \pi_n(x) \leq \pi_n(y)\ \forall y \in T_{n-1}\}.$$

Wir erzeugen dabei eine Folge von Mengen

$$T \supseteq T_1 \supseteq T_2 \supseteq \cdots \supseteq T_n \neq \emptyset \;.$$

Wir wählen nun

$$P = (p_1, \ldots, p_n) \ \in \ T_n \ ,$$

also einen Punkt P, welcher der Reihe nach eine kleinste erste, zweite, ..., n-te Komponente hat. Wir zeigen, dass dieser Punkt P ein Extrempunkt von T ist.
Angenommen es gäbe $X = (x_1, \ldots, x_n) \neq Y = (y_1, \ldots, y_n) \in T$, sodass

$$P \ = \ tX + (1-t)Y \quad \text{für } 0 < t < 1 \ .$$

Für die erste Komponente muss gelten

$$x_1, y_1 \geq p_1 \quad \text{und} \quad p_1 = tx_1 + (1-t)y_1 \ .$$

Das geht nur für $x_1 = y_1 = p_1$, also $X, Y \in T_1$.
Nun können wir induktiv vorgehen: angenommen wir haben schon bewiesen $x_i = y_i = p_i$ für $i = 1, \ldots, r$, also $X, Y \in T_r$. Ist $r < n$, dann haben wir

$$p_{r+1} = tx_{r+1} + (1-t)y_{r+1},$$

und wir können wie oben schliessen $x_{r+1} = y_{r+1} = p_{r+1}$. Schliesslich ergibt sich

$$X = Y = P \ ,$$

im Widerspruch zur Annnahme $X \neq Y$. P ist also ein Extrempunkt von T. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$