Name: .....

Matr.Nr.: .....

Stud.Kennz.: .....

Klausur
"Lineare Algebra und Analytische Geometrie II" (326001)
27.6.2009

Bitte folgendes beachten:

- *Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.*
- *Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.*
- *Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.*
- *Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.*

Die Klausur ist OHNE Unterlagen zu schreiben.
Alle Lösungen sind zu begründen !

(1) Sei A eine quadratische $n \times n$ Matrix über dem Körper K.
  (a) Was bedeutet "A ist diagonalisierbar" ?
  (b) Zeigen Sie: *Eine quadratische $n \times n$ Matrix A ist diagonalisierbar g.d.w. sie n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt.*

(2) Sei $V = \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ der reelle Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad höchstens 2. Mit

$$\langle p(x)|q(x)\rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x)\mathrm{d}x$$

wird V zu einem inneren Produktraum.
  (a) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement zu $E = \{x\}$.
  (b) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement zu $E = \{1, x\}$.

(3) Wir betrachten die folgende Matrix über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Zerlegen Sie A in die Summe einer symmetrischen Matrix $\tilde{A}$ und einer schiefsymmetrischen Matrix $\hat{A}$; also $A = \tilde{A} + \hat{A}$.
(b) Sei q die quadratische Form, die durch $\tilde{A}$ (bzw. durch die Bilinearform mit Darstellungsmatrix $\tilde{A}$) auf $\mathbb{R}^3$ definiert wird. Ist q positiv oder negativ definit?

(4) Wir betrachten die folgende Matrix über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von A.
(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A, sowie die zugehörigen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.
(c) Bestimmen sie die Jordan Normalform zu A.

(5) Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$.
(a) Geben Sie eine Definition für die konvexe Hülle $\mathrm{KH}(\mathcal{P})$ von $\mathcal{P}$.
(b) Seien $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ so, dass $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$.
Zeigen oder widerlegen Sie:

$$\mathrm{KH}(\mathcal{P}) \subseteq \{\ t \cdot P_1 + (1-t) \cdot P_2 \mid P_1 \in \mathrm{KH}(\mathcal{P}_1),\ P_2 \in \mathrm{KH}(\mathcal{P}_2),\ t \in [0,1]\ \}$$

[Zusatzfrage: Zeigen oder widerlegen Sie:

$$\mathrm{KH}(\mathcal{P}) \supseteq \{\ t \cdot P_1 + (1-t) \cdot P_2 \mid P_1 \in \mathrm{KH}(\mathcal{P}_1),\ P_2 \in \mathrm{KH}(\mathcal{P}_2),\ t \in [0,1]\ \}$$]

(6) Wir betrachten die folgenden Polynome in $\mathbb{R}[x]$:

$$f_1(x) = x^5 - x^3 - x^2 - 2x + 2, \qquad f_2(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2\ .$$

(a) Bestimmen Sie den grössten gemeinsamen Teiler $g(x)$ von $f_1(x)$ und $f_2(x)$, sowie Polynome $s(x), t(x)$ sodass gilt $g(x) = s(x) \cdot f_1(x) + t(x) \cdot f_2(x)$.
(b) Was sind die gemeinsamen Nullstellen von f_1 und f_2?