Übungen zu "Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1"
Sommersemester 2009
0. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 2. März 2009.

0.1 (*Matrizen*). Invertieren Sie die komplexe Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C}).$$

(Erinnerung: Die *imaginäre Einheit* $i \in \mathbb{C}$ erfüllt die Gleichung $i^2 + 1 = 0$).

0.2 (*Lineare Abbildungen*). Sei für eine beliebige reelle 2×2-Matrix $M \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ die Abbildung

$$\Phi_M \colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ A \mapsto MA - AM$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass Φ_M linear ist.

(b) Sei

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Bestimmen sie die Matrix für Φ_N bezüglich einer Basis von $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ Ihrer Wahl.

(c) Benutzen Sie die Matrix, die Sie in Teil (b) bestimmt haben, um die Dimension des Kerns und des Bildes von Φ_N zu berechnen.

(d) Gibt es eine Matrix M derart, dass Φ_M injektiv wird?

(e) Ist die Abbildung

$$\Phi \colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})),\ M \mapsto \Phi_M$$

bijektiv? (Hinweis: Lösen Sie zuerst Teil (d)).

0.3 (*Untervektorräume*). Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, und seien U und W Untervektorräume von V. Zeigen Sie: Ist $U \cup W = V$, dann ist bereits $U = V$ oder $W = V$.

0.4 (*Dedekind-Identität*). Sei V ein K-Vektorraum mit Unterräumen U_1, U_2 und U_3. Gilt $U_1 \subseteq U_3$, so ist

$$(U_1 + U_2) \cap U_3 = U_1 + (U_2 \cap U_3).$$

0.5 (*International Standard Book Numbers*). Sei $K = \mathbb{Z}_{11}$ und

$$U = \left\{\ a \in \mathrm{Mat}_{10\times 1}(K)\ \middle|\ (1, 2, \ldots, 10) \cdot a = 0\ \right\} \subseteq K^{10}.$$

Zeigen Sie:

(a) Verschiedene Elemente aus U unterscheiden sich an mindestens zwei Stellen.

(b) Verschiedene Elemente aus U unterscheiden sich nicht nur durch die Vertauschung zweier Einträge.

0.6 (*Gruppen*). Sei G eine beliebige Gruppe.

(a) Sei H eine Untergruppe von G. Zeigen Sie: Gilt $|G/H| = 2$, dann ist H ein Normalteiler von G.

(b) Zeigen Sie: Wenn $\varphi \colon G \to G,\ a \mapsto a^2$ ein Homomorphismus ist, so ist G Abelsch.

(c) (*Indexsatz von Lagrange*) Sei G endlich, und sei H eine Untergruppe von G. Zeigen Sie: $|H|$ ist ein Teiler von $|G|$.

0.7 (*Systeme linearer Gleichungen*). Seien K ein Körper, $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ und $b \in \mathrm{Mat}_{m\times 1}(K)$. Die erweiterte Matrix $(A|b)$ habe die Hermite-Form

$$(\tilde{A}|\tilde{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{1,r+1} & \cdots & \tilde{a}_{1,n} & \tilde{b}_1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \tilde{a}_{r,r+1} & \cdots & \tilde{a}_{r,n} & \tilde{b}_r \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \tilde{b}_m \end{pmatrix}.$$

(Hierbei ist $r \leq \min\{m, n\}$). Zeigen Sie:

(a) Das System $(A|b)$ linearer Gleichungen besitzt genau dann eine Lösung, wenn $\tilde{b}_{r+1} = \ldots = \tilde{b}_m = 0$ gilt.

(b) In diesem Fall ist $(\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_r, 0, \ldots, 0)^T \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(K)$ eine Lösung.

(c) Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,r+1} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{r,r+1} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,r+2} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{r,r+2} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,n} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times 1}(K)$$

bilden eine Basis des Lösungsraumes des homogenen Systems $(A|0)$.

(d) Sei eine Permutationsmatrix $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ gegeben. Ist

$$\{w + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-r} v_{n-r} \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r} \in K\}$$

die Lösungsmenge des Systems $(A|b)$, so ist die Lösungsmenge des Systems $(AP|b)$

$$\{(P^{-1}w) + \lambda_1(P^{-1}v_1) + \ldots + \lambda_{n-r}(P^{-1}v_{n-r}) \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r} \in K\}.$$

0.8 (*System linearer Gleichungen*). Gegeben sei das System linearer Gleichungen

$$\begin{aligned} w + 2x + y &= 1 \\ 2x - w - y - 4z &= -1 \\ w - x + y + 3z &= 1 \\ 2w + 2y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

mit reellen Koeffizienten.

(a) Bestimmen Sie die erweiterte Matrix $(A|b)$ des Systems. (Tipp: Die späteren Rechnungen werden einfacher, wenn Sie die Variablen *alphabetisch* sortieren).

(b) Bestimmen Sie die Hermite-Form von $(A|b)$.

(c) Benutzen Sie Aufgabe 0.7, um die Lösungsmenge des Systems anzugeben.