Übungen zu "Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1"
Sommersemester 2009
1. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 9. März 2009.

1.1 (*Determinanten*). Sei

$$A_n = \left(1 - \delta_{ij}\right)_{i,j=1}^{n} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Q}),$$

wobei δ das *Kronecker-Symbol* darstellt (d. h., $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$). Zeigen Sie: Für $n \geq 1$ ist $\det A_n = (-1)^{n-1}(n-1)$.

1.2 (*Lineare Unabhängigkeit*). Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie: 1, $\sqrt{p}$ und $\sqrt{q}$ sind linear unabhängig über $\mathbb{Q}$.

1.3 (*Lineare Abbildungen und Matrizen*). Die *(formale) Integration* (oder *Stammfunktion*) ist definiert als

$$S_n\colon\ \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Pol}_{n+1}(\mathbb{R}),\ p(x) \mapsto \int p(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Bestimmen Sie die Matrix der Abbildung bezüglich der Standardbasen $1, x, x^2$ und $1, x, x^2, x^3$.

(b) Bestimmen Sie die Matrix der Abbildung bezüglich der Basen $1, x, 2x^2-1$ und $1, x, 2x^2-1, 4x^3-3x$ (diese Basis ist bekannt als *Chebychev-Polynome erster Art*) mit Hilfe von Satz 6.38.

1.4 (*Reed-Solomon-Code*). Sei K ein endlicher Körper mit $q \geq 3$ Elementen, und seien n und d natürliche Zahlen mit $2 \leq d \leq n \leq q-1$. Seien außerdem $a_1, \ldots, a_n \in K \setminus \{0\}$. Definiere

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{d-1} & a_2^{d-1} & \cdots & a_n^{d-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{d-1\times n}(K)$$

und $C = \{c \in K^n \mid Hc = 0\}$.

Zeigen Sie:

(a) Je $d-1$ Spalten von H sind linear unabhängig (Hinweis: Vandermonde-Determinante).

(b) Es gilt $\dim_K C = n - d + 1$.

(c) Zwei Vektoren $a, b \in K^n$ unterscheiden sich genau dann an ℓ Stellen, wenn ℓ Einträge von $a - b$ ungleich Null sind.

(d) Je zwei verschiedene Vektoren aus C unterscheiden sich an mindestens d Stellen.

Bemerkung: Der Raum C wird *Reed-Solomon-Code* genannt. Er wird unter anderem verwendet, um Daten auf CDs vor Kratzern zu schützen. Nach Teil (d) kann er $(d-1)/2$ Fehler pro Codewort korrigieren.

1.5 (*Lineare Unabhängigkeit und Determinanten*). Geben Sie eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ mit überabzählbar vielen Elementen an, derart dass je drei verschiedene Elemente aus M linear unabhängig sind.

1.6 (*Permutationen*). Finden Sie in der symmetrischen Gruppe $P_4 = S(\{1,2,3,4\})$ eine Untergruppe, die isomorph zu $(\mathbb{Z}_2^2, +)$ ist. Ist Ihre Untergruppe ein Normalteiler?

(Sie dürfen zum Überprüfen der Normalteilereigenschaft — ohne Beweis — benutzen, dass jedes Element aus P_4 sich als Produkt der Transpositionen $1 \leftrightarrow 2$, $1 \leftrightarrow 3$ und $1 \leftrightarrow 4$ schreiben lässt).

1.7 (*Adjazenzmatrix*). Sei $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ eine Menge von Städten. Wir definieren eine Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Q})$ wie folgt:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn eine Flugverbindung zwischen } s_i \text{ und } s_j \text{ existiert,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir schreiben $A^m = (a_{ij}^{(m)})_{ij}$.

Zeigen Sie: Genau dann ist $a_{ij}^{(m+1)} \neq 0$, wenn man mit höchstens m-mal Umsteigen von s_i nach s_j fliegen kann.

1.8 (*Cramersche Regel*). Lösen Sie das System linearer Gleichungen mit rationalen Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der *Cramerschen Regel*.