auszuarbeiten bis 23. März

Aufgabe 3. 1. Der Rang, $\mathrm{Rang}(h)$, einer linearen Abbildung $h\colon V \longrightarrow W$, wobei V, W endlichdimensionale Vektorräume sind, ist definiert als der Rang irgendeiner Darstellungsmatrix von h. Zeigen Sie, daß $\mathrm{Rang}(h) = \dim(\mathrm{im}(h))$.

Aufgabe 3. 2. Es sei $f\colon V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung der Vektorräume V, W über dem Körper K.

1. Zeigen Sie, daß $\alpha \mapsto \alpha \circ f$ eine lineare Abbildung auf den Dualräumen $f^\star\colon W^\star \longrightarrow V^\star$ definiert. $f^\star$ heißt die zu f **duale Abbildung**.
2. Es sei $g\colon W \longrightarrow X$ eine weitere lineare Abbildung. Zeigen Sie, daß gilt:

$$(g \circ f)^\star = f^\star \circ g^\star.$$

Aufgabe 3. 3. Es seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über K und $f\colon V \longrightarrow W$ linear. Bezüglich der geordneten Basen B von V und C von W habe f die Darstellungsmatrix $A = \mathcal{A}(f, B, C)$. Weiters bezeichnen $B^\star$ und $C^\star$ die zu B und C dualen Basen von $V^\star$ bzw. $W^\star$. Zeigen Sie, daß die zu f duale Abbildung bezüglich der dualen Basen durch die zu A Transponierte dargestellt wird, daß also $\mathcal{A}(f^\star, C^\star, B^\star) = A^t$ gilt.

Aufgabe 3. 4. Sei V ein komplexer Vektorraum, $h\colon V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung, $r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

> $\mu \in \mathbb{C}$ ist Eigenwert von h^r genau dann, wenn es einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von h gibt mit $\lambda^r = \mu$.

Aufgabe 3. 5. Sei V ein Vektorraum über K mit $\dim V = n$, $h\colon V \longrightarrow V$ ein linearer Endomorphismus, $\lambda \in K$ ein Eigenwert von h mit algebraischer Vielfachheit d. Zeigen Sie, daß $\dim(h - \lambda\mathrm{id})(V) \geq n - d$ ist.

Aufgabe 3. 6. Entscheiden Sie, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.