Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 (SS 09)
4. Übungsblatt
(auszuarbeiten bis 30. März 2009)

4.1 (Adjungierte Matrizen)

Invertieren Sie folgende Matrizen über $\mathbb{R}$ durch Verwenden der adjungierten Matrizen—sofern möglich:

(a) $A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $B := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4.2 (Eigenschaften von Eigenwerten)

Zeigen oder widerlegen Sie für $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda_A, \lambda_B \in \mathbb{R}$

(a) $\lambda_A + \lambda_B \in \sigma(A+B) \iff \lambda_A \in \sigma(A) \wedge \lambda_B \in \sigma(B)$,

(b) $\sigma(A) = \sigma\left(A^T\right)$,

(c) A ist singulär $\iff 0 \in \sigma(A)$.

4.3 (Eigenschaften von Eigenwerten)

Zeigen oder widerlegen Sie für $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, jeweils regulär und $\lambda_A, \lambda_B \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(a) $\lambda_A \in \sigma(A) \iff \lambda_A^{-1} \in \sigma(A^{-1})$,

(b) $\lambda_A - \lambda_B \in \sigma(A-B) \iff \lambda_A \in \sigma(A) \wedge \lambda_B \in \sigma(B)$,

(c) $\lambda \in \sigma(A) \iff k\lambda \in \sigma(kA)$.

4.4 (Diagonalisieren von Matrizen)

Diagonalisieren Sie folgende Matrizen, sofern möglich. Geben Sie die Transformationsmatrizen explizit an.

(a) $A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4.5 (Eigenwerte und -vektoren)

Bei einer Fernsehdiskussion vertreten die Gesprächsteilnehmer Herr Konrad und Frau Rainer unterschiedliche Meinungen. Alle 15 Fernsehminuten verliert Herr Konrad 5 von 14 seiner Anhänger an Frau Rainer. Umgekehrt verliert Frau Rainer alle 15 Fernsehminuten jeden siebten ihrer Anhänger an Herrn Konrad.

500.000 Menschen sehen die Sendung und zu Beginn sind 4 von 5 der Zuseher Anhänger von Herrn Konrad.

(a) Wieviele Anhänger haben Herr Konrad und Frau Rainer nach 90 Minuten?

(b) Wie lange müßte die Fernsehsendung laufen, damit Herr Frau Rainer mindestens 400.000 Anhänger hat?

(*Hinweis:* Für dieses Beispiel betrachten wir Menschen nicht als unteilbares Ganzes. Sie brauchen also die (Zwischen-)Ergebnisse nicht auf ganze Menschen zu runden.)

4.6 (Differentialgleichungen)

Lösen Sie folgendes System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 3y_1(t) - y_2(t) + y_3(t) \\ y_2'(t) &= 3y_1(t) + y_2(t) - y_3(t) \\ y_3'(t) &= 6y_1(t) - 4y_2(t) + 4y_3(t), \end{aligned}$$

mit $y_1(0) = 0, y_2(0) = 4$, and $y_3(0) = 0$.

4.7 (Minimalpolynom)

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und Minimalpolynom von

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4.8 (Satz von Cayley Hamilton)

Invertieren Sie folgende Matrizen über $\mathbb{R}$ durch Anwenden des Satzes von Cayley Hamilton—sofern möglich:

(a) $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$