Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 (SS 09)
5. Übungsblatt
(auszuarbeiten bis 20. April 2009)

5.1 (Aufwärmen im Bidualraum)

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ über dem Körper $K = \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie $h(a), h'(a)$ und $(1,1)'(a)$ für alle $a \in \{(3,1), g, \bar{g}, (3,1)'\}$, sofern möglich.

$$\begin{array}{rccc} g: & V & \to & K \\ & (x,y) & \mapsto & 2x+y, \\ \bar{g}: & V & \to & K \\ & (x,y) & \mapsto & x-y^2, \\ h: & V & \to & V^{**} \\ & v & \mapsto & v' \\ v': & V^* & \to & K \\ & f & \mapsto & f(v), \end{array},$$

für alle $v \in V$.

5.2 (Bidualraum)

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper K.

Zeigen oder widerlegen Sie, dass h ein Homomorphismus von V nach V^{**} ist, wobei

$$\begin{array}{rccc} h: & V & \to & V^{**} \\ & v & \mapsto & v' \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccc} v': & V^* & \to & K \\ & f & \mapsto & f(v), \end{array}$$

für alle $v \in V$.

5.3 (Bidualraum)

Seien V, K, h und v' für alle $v \in V$ so wie in Beispiel 5.2.

Zeigen oder widerlegen Sie, dass h ein Isomorphismus von V nach V^{**} ist.

5.4 (Matrizen und Skalarprodukte)

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass f bzw. g bzw. h ein Skalarprodukt auf V ist, wobei

$$\begin{array}{rccc} f: & V \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} y^T, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f: & V \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} y^T, \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccc} f: & V \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y^T. \end{array}$$

5.5 (Matrizen und Skalarprodukte)

Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass es für jedes Skalarprodukt f_n auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V über K, und für jede Basis B von V es ein $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ gibt, sodass

$$f_n(v_1, v_2) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\, A\, (\mu_1, \cdots, \mu_n)^T, \forall v_1, v_2 \in V$$

gilt, wobei $n := \dim(V)$. $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)^T$ bezeichne dabei v_1 zur Basis B und $(\mu_1, \cdots, \mu_n)^T$ bezeichne v_2 zur Basis B.

(*Hinweis:* Betrachten Sie das Skalarprodukt von Basisvektoren als gegeben und bauen Sie daraus die Matrix A auf.)

5.6 (Matrizen und Skalarprodukte)

Zeigen oder widerlegen Sie, dass es für jeden endlichdimensionalen Vektorraum V über K, und für jede Basis B von V und jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ f_n ein Skalarprodukt auf V ist, wobei

$$f_n(v_1, v_2) := (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\, A\, (\mu_1, \cdots, \mu_n)^T, \forall v_1, v_2 \in V$$

und $n := \dim(V)$. $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)^T$ bezeichne dabei v_1 zur Basis B und $(\mu_1, \cdots, \mu_n)^T$ bezeichne v_2 zur Basis B.

5.7 (Skalarprodukt)
Quelle (vom 2009-03-24): `http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~fgaisen/aufgaben11.pdf`

Zeigen oder widerlegen Sie jeweils für natürliche Zahlen

- $n = 1$
- $n = 2$
- $n = 3$
- $n > 3$

dass es ein Skalarprodukt f_n auf $V := \mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ gibt, für das

$$f_n((x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n)) = (|x_1| + \cdots + |x_n|)^2$$

gilt.

(*Hinweis:* Lösen Sie zuerst Beispiel 5.5.)

5.8 (Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$)
Quelle (vom 2009-03-25): `http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/aufgabe/aufgabe1221/`

Bestimmen Sie, für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f_{\lambda,\mu}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist, wobei

$$f_{\lambda,\mu}(x, y) := x^T \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \mu & 1 \end{pmatrix} y.$$