Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 (SS 09)
5. Übungsblatt
(auszuarbeiten bis 20. April 2009)

5.1 (Eigenwerte und Eigenvektoren)
Quelle (vom 2009-03-26): `http://www.iks.hs-merseburg.de/~kilian/ak_Dateien/ak_lehre_Dateien/2008_WS/math_MKAS_I_UE/09.Eigenwerte.pdf`

Sei

$$A := \begin{pmatrix} a+1 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \\ a & 0 & a+1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

- Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist -1 ein Eigenwert von A?
- Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist 1 ein Eigenwert von A?
- Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind sowohl 1 als auch -1 Eigenwerte von A? Bestimmen Sie die Eigenvektoren von A für alle solchen $a \in A$.

5.2 (Eigenschaften zu Eigenwerte und Eigenvektoren)
Quelle (vom 2009-03-26): `http://www.math.uni-augsburg.de/ana/la1/ws0506/14LAI.pdf`

Sei $n \in \mathbb{N}^+$, K ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$. Zeigen oder widerlegen Sie jeweils

- A hat mindestens einen Eigenwert
- Falls λ ein Eigenwert von A ist, so gibt es mindestens einen Eigenvektor v zu λ.
- Falls v_1 und v_2 Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ sind, so gilt $v_1 = v_2$.
- Falls v_1 und v_2 Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ sind, so sind (v_1, v_2) linear abhängig.
- Falls v_1 und v_2 Eigenvektoren von A zu λ_1 bzw. λ_2 sind, so ist $v_1 + v_2$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 + \lambda_2$.
- Falls v_1 und v_2 Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ sind, so ist $v_1 + v_2$ ebenfalls Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

5.3 (Matrizen und Skalarprodukte)

Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass f bzw. g bzw. h ein Skalarprodukt auf V ist, wobei

$$\begin{array}{rccc} f: & V \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} y^T, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f: & V \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} y^T, \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccc} f: & V \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y^T. \end{array}$$

5.4 (Matrizen und Skalarprodukte)

Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass es für jedes Skalarprodukt f_n auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V über K, und für jede Basis B von V es ein $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ gibt, sodass

$$f_n(v_1, v_2) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\, A\, (\mu_1, \cdots, \mu_n)^T, \forall v_1, v_2 \in V$$

gilt, wobei $n := \dim(V)$. $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)^T$ bezeichne dabei v_1 zur Basis B und $(\mu_1, \cdots, \mu_n)^T$ bezeichne v_2 zur Basis B.

(*Hinweis:* Betrachten Sie das Skalarprodukt von Basisvektoren als gegeben und bauen Sie daraus die Matrix A auf.)

5.5 (Matrizen und Skalarprodukte)

Zeigen oder widerlegen Sie, dass es für jeden endlichdimensionalen Vektorraum V über K, und für jede Basis B von V und jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ f_n ein Skalarprodukt auf V ist, wobei

$$f_n(v_1, v_2) := (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\, A\, (\mu_1, \cdots, \mu_n)^T, \forall v_1, v_2 \in V$$

und $n := \dim(V)$. $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)^T$ bezeichne dabei v_1 zur Basis B und $(\mu_1, \cdots, \mu_n)^T$ bezeichne v_2 zur Basis B.

5.6 (Skalarprodukt)
Quelle (vom 2009-03-24): `http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~fgaisen/aufgaben11.pdf`

Zeigen oder widerlegen Sie jeweils für natürliche Zahlen

- $n = 1$
- $n = 2$
- $n = 3$
- $n > 3$

dass es ein Skalarprodukt f_n auf $V := \mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ gibt, für das

$$f_n((x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n)) = (|x_1| + \cdots + |x_n|)^2$$

gilt.

(*Hinweis:* Lösen Sie zuerst Beispiel 5.4.)

5.7 (Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$)
Quelle (vom 2009-03-25): `http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/aufgabe/aufgabe1221/`

Bestimmen Sie, für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f_{\lambda,\mu}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist, wobei

$$f_{\lambda,\mu}(x, y) := x^T \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \mu & 1 \end{pmatrix} y.$$

5.8 (Projektionen und Gram-Schmidt)

Sei $V = \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt

$$\begin{array}{rccc} f: & V \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (p, q) & \mapsto & \int_0^1 p(x)q(x)dx \end{array}$$

und sei $W := \mathrm{span}\,(3x + 3, 42x + 84)$.

Berechnen Sie

- eine Orthonormalbasis von W.
- die orthonormale Projektion von $x^2 + 2x$ auf W.

(*Hinweis:* Führen Sie die Nebenrechnungen am Computer durch.)