Übungen zu "Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1"
Sommersemester 2009
6. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 27. April 2009.

6.1 (*Innere Produkte*). Beweisen oder widerlegen Sie für jede der folgenden Abbildungen, dass sie ein inneres Produkt auf dem angebenen (reellen oder komplexen) Raum darstellt:

(a) $\langle\cdot|\cdot\rangle_1 \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \sum_{j=1}^n x_j w_j y_j$, wobei $n \geq 1$ und $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}$ mit $w_1, \ldots, w_n > 0$;

(b) $\langle\cdot|\cdot\rangle_2 \colon \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C},\ (A,B) \mapsto \mathrm{spur}(\overline{B^T} \cdot A)$ mit $n \geq 1$ und

(c) $\langle\cdot|\cdot\rangle_3 \colon \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \times \mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, (p,q) \mapsto (dp/dx) \cdot (dq/dx)$.

6.2 (*Gram-Schmidt*). Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}).$$

Benutzen Sie den *Gram-Schmidt Orthonormalisierungsprozess* um eine Orthonormalbasis zu berechnen für

(a) den von A und B, sowie

(b) den von A, B und C

aufgespannten Unterraum. Verwenden Sie dabei das innere Produkt aus Beispiel 9.5 der Vorlesung.

6.3 (*Approximation*). Betrachten Sie den reellen Vektorraum

$$C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig auf } [0,1]\}$$

mit dem inneren Produkt

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Approximieren sie die Funktion

$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$$

bezüglich der zu $\langle\cdot|\cdot\rangle$ gehörigen Norm als Linearkombination der Polynomfunktionen

$$g_1 : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1, \quad g_2 : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \quad \text{und} \quad g_3 : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2.$$

(*Hinweis: Beachten Sie Definition 9.21 der Vorlesung.*)

6.4 (*Parallelogrammgleichung*). Sei V ein reeller Vektorraum mit innerem Produkt $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Sei $\|v\| := \langle v|v\rangle^{1/2}$ die zugehörige Norm. Beweisen Sie:

(a) Die Norm $\|\cdot\|$ erfüllt für alle v und $w \in V$ die *Parallelogrammgleichung*

$$\|v-w\|^2 + \|v+w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

(b) Für v und $w \in V$ gilt genau dann

$$\|v+w\| = \|v\| + \|w\|,$$

wenn $v = \alpha w$ oder $w = \alpha v$ mit $\alpha \geq 0$ ist.

(*Hinweis: Betrachten Sie den Beweis von Satz 9.8.*)

6.5 Sei $v_1, \ldots, v_n$ ein Orthonormalsystem im reellen Raum V mit innerem Produkt $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Zeigen Sie:

$$\left\|\sum_{k=1}^n v_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^n (-1)^k v_k\right\|,$$

wobei $\|\cdot\|$ die zu $\langle\cdot|\cdot\rangle$ gehörige Norm ist.

6.6 (*Innere Produkte und Matrizen*). Sei V ein reeller Raum mit innerem Produkt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ und Basis $\mathfrak{B}$ bestehend aus den Elementen $u_1, \ldots, u_n$. Wir definieren die *Gramsche Matrix*

$$A = \Big(\langle u_i|u_j\rangle\Big)_{i,j=1}^n \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

wie in der (Lösung der) Übungsaufgabe 5.5.

(a) Zeigen Sie: Es existiert eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ derart, dass

$$S^t A S = I_n.$$

(b) Zeigen Sie: Die Eigenwerte von A sind alle strikt größer als Null. Insbesondere ist A invertierbar.

(c) Berechnen Sie A im Falle des Raumes $V = \mathrm{Pol}(\mathbb{R})_2$ für das innere Produkt aus Beispiel 9.4 (b) und die kanonische Basis $1, x, x^2$.

6.7 (*Orthogonales Komplement*). Wir betrachten einen reellen Raum V mit dem inneren Produkt $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Sei U ein Unterraum von V. Wir definieren das *orthogonale Komplement* von U als

$$U^\perp := \{v \in V \mid u \perp v \text{ für alle } u \in U\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $U^\perp$ ein Unterraum von V ist.

(b) Zeigen Sie: Ist $U = \mathrm{span}(u_1, \ldots, u_n)$ so gilt

$$U^\perp = \{v \in V \mid u_j \perp v \text{ für } j = 1, \ldots, n\}.$$

(c) Berechnen Sie eine Basis von $U^\perp$ für $V = \mathbb{R}^4$ und

$$U = \mathrm{span}\Big(\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\Big)$$

bezüglich des kanonischen inneren Produktes aus Beispiel 9.3.

(d) Berechnen Sie eine Basis von $U^\perp$ für $V = \mathrm{Pol}(\mathbb{R})_2$ und $U = \mathrm{span}(1, x^2)$ bezüglich des inneren Produktes aus Beispiel 9.4 (b).

(*Hinweis: Der Teil* (c) *von Aufgabe 6.6 ist hier hilfreich.*)

6.8 (*Skalarprodukt und Dualraum*). Beweisen Sie die folgende (vereinfachte) Version des *Rieszschen Darstellungssatzes*: Sei V ein reeller oder komplexer Raum mit innerem Produkt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ und mit endlicher Dimension. Dann gibt es zu jedem linearen Funktional $f \in V^*$ genau ein Element $y \in V$ derart, dass

$$f(x) = \langle x|y\rangle \qquad \text{für alle } x \in V.$$