Übungen zu "Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1"
Sommersemester 2009
7. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 11. Mai 2009.

7.1 (*Satz 9.49*). Beweisen Sie Satz 9.49: Sei $h \in \mathrm{Hom}(V, V)$ eine bijektive Abbildung auf dem inneren Produktraum V. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\|h(v)\| = \|v\|$ und $\angle(v, w) = \angle(h(v), h(w))$ für alle $v, w \in V$;

(ii) $\langle h(v)|h(w)\rangle = \langle v|w\rangle$ für alle $v, w \in V$;

(iii) $\mathcal{A}_{h,B,B}$ ist orthogonal für alle Orthonormalbasen B von V.

Es reicht, wenn Sie den Satz für reelle V beweisen.
(*Hinweis: Benutzen Sie Satz 9.48 und gegebenenfalls die Lösung von Aufgabe 5.6.*)

7.2 (*Orthogonale Projektion*). Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Sei V ein K-Raum der Dimension $n < \infty$ mit kanonischem innerem Produkt $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Sei W ein Unterraum von V mit Orthonormalbasis $f_1, \ldots, f_\ell$, und sei $F = (f_1, \ldots, f_\ell) \in \mathrm{Mat}_{n\times\ell}(K)$ die Matrix, die $f_1, \ldots, f_n$ als Spalten enthält. Zeigen Sie: Bezüglich der Einheitsbasen ist die Matrix der orthogonalen Projektion auf W gegeben durch

$$F\overline{F}^T.$$

7.3 (*Orthogonale Projektion*). Bestimmen Sie Matrizen der orthogonalen Projektion bezüglich der kanonischen inneren Produkte von $\mathbb{R}^3$

(a) auf die durch $x + y - z = 0$ bestimmte Ebene, und

(b) auf den durch $(1, -1, 1)^T$ aufgespannten Teilraum.

7.4 (*Isometrien*). Sei V ein reeller Raum mit innerem Produkt $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Sei $h\colon V \to V$ eine Isometrie. Zeigen Sie:

(a) Die Eigenwerte von h sind 1 oder -1.

(b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

(c) Gilt $h(U) = U$ für einen Unterraum U von V, dann ist $h(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

7.5 (*Orthogonale Matrizen*). Für welche x, y beziehungsweise x, y, z sind die Matrizen

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & x \\ (1-i)/\sqrt{3} & y \end{pmatrix} \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & i/\sqrt{2} & x \\ -i/2 & -1/\sqrt{2} & y \\ (1-i)/2 & 0 & z \end{pmatrix}$$

orthogonal?[1]

7.6 (*Fourier-Transformation*). Wir betrachten den (reellen) Raum $C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Weiterhin sei für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$e(x) = 1, \qquad s_k(x) = \sin(kx), \qquad \text{und} \qquad c_k(x) = \cos(kx).$$

Zeigen Sie: Die Menge

$$\{e\} \cup \{s_k \mid k \geq 1\} \cup \{c_k \mid k \geq 1\}$$

bildet eine orthogonale Menge in $C([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

Sie dürfen eine Formelsammlung verwenden.

[1] Aufgabe nach: Udo Vetter, *Lineare Algebra*, Skript zur Vorlesung an der Universität Oldenburg