auszuarbeiten bis 18. Mai

Aufgabe 8. 1. Es seien $a < b$ reelle Zahlen. Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektorräume jeweils reelle innere Produkträume sind.

1. $C([a,b],\mathbb{R})$, $< f|g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$
2. $\mathbb{R}[x]$, $< p|q >= \int_a^b pq$
3. $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $< f|g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$

Aufgabe 8. 2. Gegeben sei die Bilinearform

$$f\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_3$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der geordneten Basis

$$B = \{(1,1,1),(-1,1,1),(0,1,0)\}$$

1. mit Hilfe von Satz 10.14;
2. direkt.

Aufgabe 8. 3. Gegeben seien die beiden Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1,x_2) \mapsto 2x_1 - 3x_2 \qquad g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (y_1,y_2,y_3) \mapsto y_1 + 2y_2 - y_3$$

sowie die Basen $B = \{(1,1),(-1,1)\}$ und $C = \{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,1)\}$ von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Es mögen $B^\star, C^\star$ die dualen Basen zu B, C bezeichnen. Berechnen Sie die Darstellung der Bilinearform $f \otimes g$ als Linearkombination in der Basis

$$\{\beta \otimes \gamma \mid \beta \in B^\star \wedge \gamma \in C^\star\}.$$

Aufgabe 8. 4. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie ein $P \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ so, daß P^TAP eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 8. 5. Es sei $\dim_K V = n < \infty$, $f\colon V \times V \longrightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform, $v \in V$ ein Vektor mit $f(v,v) \neq 0$. Zeigen Sie, daß

$$V = \mathrm{span}(v) \oplus \{v\}^\perp$$

wobei das orthogonale Komplement von $S \subseteq V$ bezüglich f gegeben ist als

$$S^\perp = \{x \in V \mid f(x,s) = 0\ \forall s \in S\}.$$

Aufgabe 8. 6. Es sei $S_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| = 1\}$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie Maximum und Minimum der Funktion

$$f\colon S_3 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y,z) = x^2 - 2xy - y^2 + z^2.$$

Aufgabe 8. 7. Es sei $n > 0$, und f das Skalarprodukt auf dem Raum der reellen Polynome vom Grad kleiner gleich n

$$f\colon \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(a,b) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

Bestimmen Sie Rang, Index und Signatur von f in Abhängigkeit von n.