Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 (SS 09)
10. Übungsblatt
(auszuarbeiten bis 8. Juni 2009)

10.1 (Jordan-Normalform und Jordan-Basis)

Bestimmen Sie von folgender Matrix Jordan-Normalform und Jordan-Basis:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10.2 (Polynome und lineare Funktionen)

Sei V ein Vektorraum über dem Körper K und $p \in K[x]$. Weiters sei $T : V \to V$ linear. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $p(T) : V \to V$ linear ist.

10.3 (Primärdekomposition)

Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 7 & -11 & 4 \\ 5 & -8 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zerlegen Sie V in nicht-triviale, f-invariante Teilräume, deren Summe wiederum V ist.

10.4 (Nilpotente Funktionen)

Überprüfen Sie, ob folgende Matrizen nilpotent über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{F}_2$ sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die kleinste Potenz, bei der die Matrix verschwindet.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -13 & 1 & 19 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

10.5 (Eigenschaften nilpotenter Funktionen)

Sei A eine nilpotente $n \times n$ Matrix. Zeigen oder widerlegen Sie $\sigma(A) = \{0\}$.

10.6 (Eigenschaften nilpotenter Funktionen (Fortsetzung))
Quelle (vom 2009-05-19): `http://www.math.uni-bielefeld.de/~mspiess/LA2/LA2-5.pdf`

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $f : V \to V$ eine lineare Funktion mit $\sigma(f) = \{0\}$. Zeigen oder widerlegen Sie jeweils:

- $K = \mathbb{R} \implies f$ ist nilpotent
- $K = \mathbb{C} \implies f$ ist nilpotent

10.7 (Eigenschaften nilpotenter Funktionen (Fortsetzung))
Quelle (vom 2009-05-21): `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Nilpotente_Matrix&oldid=57524611`

Sei A eine $n \times n$ Matrix. Zeigen oder widerlegen Sie jeweils.

- A ist nilpotent $\implies$ A enthält linear abhängige Spaltenvektoren.
- A enthält linear abhängige Spaltenvektoren $\implies$ A ist nilpotent.

10.8 (Diagonalisierung für geschlossene Form)
Quelle (vom 2009-05-21): `http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/lehrmaterial/SS2006/LAII/u3.pdf`

Sei $\tau_{-2} = \tau_{-1} = \tau_0 = 1$ und $\forall n \in \mathbb{N} : \tau_{n+1} = 2\tau_{n-1} - 4\tau_{n-2}$. Finden Sie einen geschlossenen Ausdruck für τ_n.