Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2 (SS 09)
11. Übungsblatt
(auszuarbeiten bis 22. Juni 2009)

11.1 (Idempotente Matrizen)

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper K und $T : V \to V$ linear und idempotent[1].

- Finden Sie für $V = \mathbb{R}^2$ ein Beispiel für T mit $0 \neq T \neq id$ und geben Sie dessen Darstellungsmatrix an oder beweisen Sie, dass es kein solches T gibt.(Die Wahl von V und T gilt nur für diesen Unterpunkt.)
- Sei W das Bild von T bzgl. V. Zeigen oder widerlegen Sie: $T \in \mathrm{Hom}_K(W, W)$.
- Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von T als Operator von W nach W, sofern sie existiert.

(*Hinweis:* Die Darstellungsmatrix von T auf W ist für jede Basis von W gleich. Dieser Teil kann gelöst werden, ohne eine spezielle Basis von W zu wählen.)

11.2 (Idempotente Matrizen (Fortsetzung))
Quelle (vom 2009-05-19): `http://www.math.uni-bielefeld.de/~mspiess/LA2/LA2-4.pdf`

Sei V, T, W wie in Beispiel 11.1.

- Zeigen oder widerlegen Sie $\mathrm{im}\,(T) \cap \mathrm{kern}\,(T) = \{0\}$.
- Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Darstellungsmatrix von T bezüglich einer geeigneten Basis von der folgenden Form ist:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11.3 (Idempotente Matrizen (Fortsetzung))

Sei V, T, W wie in Beispiel 11.1.

- Zeigen oder widerlegen Sie: $\sigma\,(T) \subseteq \{0, 1\}$
- In Beispiel 11.1 haben wir gezeigt, dass $\mathrm{im}\,(T) \cap \mathrm{kern}\,(T) = \{0\}$ gilt, wobei $T : V \to V$ linearer und idempotent war. Sei nun $V = \mathbb{R}^2$. Finden Sie einen linearen (nicht notwendigerweise idempotenten) Operator $S : V \to V$ für den
$$\mathrm{im}\,(S) = \mathrm{kern}\,(S)$$
gilt, sofern so ein S existiert.

[1] T ist idempotent $:\iff T^2 = T$.

- Zeigen oder widerlegen Sie: Für einen beliebigen aber festen Vektorraum V und einen linearen Operator $S : V \to V$ gilt höchstens eine der beiden folgenden Aussagen

$$\operatorname{im}(S) \cap \operatorname{kern}(S) = \{0\}$$
$$\operatorname{im}(S) = \operatorname{kern}(S).$$

11.4 (Jordan-Block-Matrizen)

Sei f eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^{10}$ mit

$$c_f(x) := (x-1)^2(x-2)^4(x-3)^4 \tag{1}$$
$$m_f(x) := (x-1)^2(x-2)^3(x-3)^2 \tag{2}$$

- Bestimmen Sie, welcher Eigenwert wie oft in der Diagonale einer Jordan-Block-Matrix von f vorkommt.
- Bestimmen Sie, alle (bis auf Umordnungen) möglichen Jordan-Block-Matrizen von f.

11.5 (Jordan-Block-Matrizen)

Sei A folgende 6×6 Matrix über $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Sei f die lineare Abbildung von $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$, die A als Darstellungsmatrix bezüglich der kanonischen Basis hat. Bestimmen Sie

- eine Basis B, in der die Darstellungsmatrix zu f eine Jordan-Blockdiagonalmatrix ist.
- die Darstellungsmatrix J_f von f bezüglich B.

11.6 (Potenzen von Jordan-Block-Matrizen)

Sei J eine elementare $m \times m$ Jordan-Matrix. Also

$$J := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \dots & \binom{n}{m-1}\lambda^{n-(m-1)} \\ & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \dots & \binom{n}{m-2}\lambda^{n-(m-2)} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ & & & & \lambda^n \end{pmatrix}$$

11.7 (Potenzen von Jordan-Block-Matrizen)

Seien A, f, J_f wie in Beispiel 11.5.

Berechnen Sie

- J_f^4 über die Darstellung aus Beispiel 11.6.
- A^4 über das Ergebnis von J_f^4.

11.8 (Diagonalisierung für geschlossene Form)

Sei $\tau_{-2} = \tau_{-1} = 0$ und $\tau_0 = 1$ und $\forall n \in \mathbb{N} : \tau_{n+1} = 5\tau_n - 8\tau_{n-1} + 4\tau_{n-2}$. Finden Sie einen geschlossenen Ausdruck für τ_n.