1. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Linear Algebra 2 für PhysikerInnen
Sommersemester 2013

1. Seien U und W K-Vektorräume. Für $h, h_1, h_2 \in \mathrm{Hom}_K(U,W)$ und $\lambda \in K$ seien Abbildungen λh und $h_1 + h_2$ von U nach W definiert durch

$$(\lambda h)(u) := \lambda h(u) \quad \text{und} \quad (h_1 + h_2)(u) := h_1(u) + h_2(u)$$

für alle $u \in U$. Man zeige: $\lambda h \in \mathrm{Hom}_K(U,W)$ und $h_1 + h_2 \in \mathrm{Hom}_K(U,W)$.

2. Seien U und W K-Vektorräume. Für die Elemente aus $\mathrm{Hom}_K(U,W)$ seien die Addition und Skalarmultiplikation von Abbildungen definiert wie im Beispiel 1. Man zeige für alle $h, h_1, h_2 \in \mathrm{Hom}_K(U,W)$ und $\lambda, \mu \in K$:

(a) $\lambda(h_1 + h_2) = \lambda h_1 + \lambda h_2$, (b) $(\lambda + \mu)h = \lambda h + \mu h$.

3. Sei $\mathrm{P}(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynomfunktionen und $D : \mathrm{P}(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}(\mathbb{R})$ die Ableitung. Man beweise: $D \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{P}(\mathbb{R}), \mathrm{P}(\mathbb{R}))$.

4. Sei $\mathrm{P}_n(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynomfunktionen $p \in \mathrm{P}(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{grad}(p) \leq n$. Sei D wie im Beispiel 3 die Ableitung. Wir wissen, Funktionen können ihre Eigenschaften ändern, wenn man ihren Definitions- bzw. Bildbereich abändert. (a) Ist $D : \mathrm{P}_5(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}_5(\mathbb{R})$ bijektiv? (b) Ist $D : \mathrm{P}_5(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}_4(\mathbb{R})$ surjektiv?

5. Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$. Beweisen Sie: f ist injektiv genau dann, wenn $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

6. Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$. Beweisen Sie: $\mathrm{Im}(f)$ ist ein Teilraum von W.