11. Übungszettel (für den 10. Juni 2013)
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Sommersemester 2013

1. Für $v = v(t)$ und $w = w(t)$ löse man das System $\frac{dv}{dt} = 3v + w$ und $\frac{dw}{dt} = -4v + 7w$ mit den Anfangsbedingungen $v(0) = 1$ und $w(0) = 0$.

2. Mittels Jordan-Normalform berechne man einen geschlossenen Ausdruck für die Lösung g_n von $g_{n+1} = -4g_{n-1} + 4g_n,\quad n \geq 1$, mit Startwerten $g_0 = 0$ und $g_1 = 1$.

3. Gegeben sei eine reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Man verifiziere für das charakteristische Polynom, daß $C_A(\lambda) = (\lambda - 2)^4$. (b) Man berechne Basen von $\mathrm{NR}(A - 2I_4)$ und $\mathrm{NR}\left((A - 2I_4)^2\right)$. (c) Man schließe daraus auf die Form einer Jordanschen Normalform J von A und berechne $M \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, sodaß $M^{-1}AM = J$.

4. Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

In Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ berechne man einen Ausdruck für die Matrix A^n.

5. Gegeben sei die reelle Matrix A wie im Beispiel 4. Mittels Matrix-Exponentialfunktion finde man die allgemeine Löesung des Systems $\frac{du}{dt} = Au$ mit $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^t$.

6. Gegeben sei die reelle Matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Man berechne Basen der Null-Räume $\mathrm{NR}(A(1) - I_3)$, $\mathrm{NR}\left((A(1) - I_3)^2\right)$ und $\mathrm{NR}\left((A(1) - I_3)^3\right)$. (b) Man schließe daraus auf die Form einer Jordanschen Normalform J von $A(1)$ und berechne $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, sodaß $M^{-1}A(1)M = J$.

7. Gegeben sei die reelle Matrix $A(x)$ wie im Beispiel 6. (a) Man berechne Basen von $\mathrm{NR}(A(0) - I_3)$, $\mathrm{NR}\left((A(0) - I_3)^2\right)$ und $\mathrm{NR}\left((A(0) - I_3)^3\right)$. (b) Man schließe daraus auf die Form einer Jordanschen Normalform J von $A(0)$ und berechne $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, sodaß $M^{-1}A(0)M = J$.