12. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Sommersemester 2013

1. Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ so, daß $C_A(\lambda)$ alle Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ in K hat. Bemerkung: $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Aus den Sätzen zur Jordanschen Normalform bzw. zur Diagonalisierbarkeit folgere man: A ist diagonalisierbar genau dann, wenn $(A - \lambda_1 I_n) \ldots (A - \lambda_k I_n) = 0$ (0-Matrix) gilt.

2. $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ mit der Eigenschaft $A^2 = A$ habe eine Jordansche Normalform J, sodaß $M^{-1}AM = J$ für $M \in \mathrm{GL}_n(K)$. (a) Zeige $J^2 = J$ and daraus $J_k^2 = J_k$ für jeden Jordan-Block J_k von J. (b) Schließe daraus, daß jeder Jordan-Block J_k die Grösse 1×1 hat und entweder aus dem Element $0 \in K$ oder dem Element $1 \in K$ besteht.

3. Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Aus dem Satz von Cayley-Hamilton folgere man, daß $A^{-1} = A$ gilt.

4. Mit dem Summationsalgorithmus für Polynom-Folgen bestimme man polynomiale Ausdrücke für $s(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\text{(a)} \quad s(n) := \sum_{k=0}^{n} k^2, \qquad \text{(b)} \quad s(n) := \sum_{k=0}^{n} k^3.$$

5. Seien $V_1, \ldots, V_r$ endliche Vektorräume über K. Für das direkte Produkt $V := V_1 \times \ldots \times V_r$ beweise: $\dim(V) = \dim(V_1) + \cdots + \dim(V_r)$.

6. Für $1 \leq k \leq n$ betrachte die Projektionsabbildungen $\pi_k : K_n \to K$, $(x_1, \ldots, x_n)^t \mapsto x_k$. (a) Zeige: $\pi_k \in K_n^*$ (Dualraum von K_n). (b) Zeige: Die Projektionen $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ bilden eine Basis des K_n.

7. Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $(v_1, \ldots, v_n)$. Sei $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die duale Basis des Dualraums V^*. Die duale Abbildung $^* : V \to V^*$ sei definiert durch $v^* := \lambda_1 v_1^* + \cdots \lambda_n v_n^*$ für $v = \lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_n v_n$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Zeige: * ist ein Isomorphismus.