13. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Sommersemester 2013

1. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Für fixes $v \in V$ definiere $\hat{v} : V^* \to K$, $\varphi \mapsto \hat{v}(\varphi) := \varphi(v)$. Zeige: (a) $\hat{v} \in V^{**}$. (b) Die Abbildung $\hat{}: V \to V^{**}$, $v \mapsto \hat{v}$ ist ein Isomorphismus.

2. Sei V ein K-Vektorraum und $U \leq_K V$. Zeige: (a) Die Relation $\sim_U$ auf V, definiert durch $\forall v_1, v_2 \in V : v_1 \sim_U v_2 :\Leftrightarrow v_1 - v_2 \in U$, ist eine Äquivalenzrelation. (b) Für eine Äquivalenzklasse K_v, $v \in V$, gilt: $K_v = \{v + u : u \in U\}$. (Kurz: $K_v = v + U$.)

3. Die Menge aller Äquivalenzklassen in Beispiel 2 sei mit V/U bezeichnet. (D.h., $V/U = V/{\sim_U} = \{K_v : v \in V\}$.) Um mit den Elementen von V/U rechnen zu können, führen wir eine Addition und eine Skalarmultiplikation wie folgt ein: Für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in K$ definiere $K_{v_1} + K_{v_2} := K_{v_1+v_2}$ und $\lambda \cdot K_v := K_{\lambda v}$. Man zeige, daß diese Operationen unabhängig von der Wahl der Repräsentanten sind. (D.h. zum Beispiel: $K_{v_1} = K_{w_1}$ und $K_{v_2} = K_{w_2}$ impliziert $K_{v_1+v_2} = K_{w_1+w_2}$.)

4. Man kann leicht verifzieren, daß U/V mit den Operationen wie in Beispiel 3 ein Vektorraum über K ist (der "Faktor-Raum" oder auch "Quotientenraum" von V nach U). (a) Zeige: für alle $v \in V : v + U = U$ genau dann, wenn $v \in U$. (b) Zeige: $K_0 = 0 + U$ ist der Null-Vektor.

5. Sei $U \leq_K V$ und $h : V \to V/U$, $v \mapsto v + U$. Man zeige: h ist linear, surjektiv und $\mathrm{Ker} h = U$ und daraus $\dim(V) = \dim(U) + \dim(V/U)$.

6. Sei $V = P_3(\mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen Polynomfunktionen vom Grad ≤ 3. Für $p, q \in V$ definiere $\langle p, q \rangle := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$. (a) Zeige: $\langle p, q \rangle$ definiert ein inneres Produkt. (b) Berechne eine ON-Basis von V durch Anwendung des Gram-Schmidt ON-Verfahrens auf die Basis $(1, x, x^2, x^3)$.