2. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Linear Algebra 2 für PhysikerInnen
Sommersemester 2013

1. Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$. Zeige, daß die Koordinatenabbildung $(\_)_B : V \to K_n$ linear und bijektiv ist.

2. Sei $V := \mathbb{R}_3$ (d.h. V besteht aus reellen Spaltenvektoren) mit Basis $B = ((1,1,1)^t, (1,1,0)^t, (1,0,0)^t)$ und sei $C = (e_1^t, e_2^t, e_3^t)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}_3$. (a) Warum ist B eine Basis des $\mathbb{R}_3$? (b) Berechne die Basistransformationsmatrix $A_{B\,C}$ und ihre inverse Matrix $A_{C\,B}$. (c) Für $v = (1,2,3)^t \in \mathbb{R}_3$ berechne $(v)_B$.

3. Seien $V := \mathbb{R}_4$ und $W := \mathbb{R}_2$ mit Standardbasen B von V und C von W, und mit Basen $B' = (b'_1, b'_2, b'_3, b'_4)$ bzw. $C' = (c'_1, c'_2)$, wobei

$$B' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad C' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Sei $h : \mathbb{R}_4 \to \mathbb{R}_2, (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3, 3x_3 + 4x_4)$. (a) Man berechne $A_{h;B',C'}$. (b) Man berechne $A_{B\,B'}$. (c) Man berechne $A_{B'\,B}$.

4. Voraussetzungen wie im Beispiel 3. Man bestimme: (a) $A_{h;B,C}$, (b) $A_{h;B',C}$, (c) $A_{h;B,C'}$.

5. Seien V und W K-Vektorräume mit $B = (b_1, \ldots, b_n)$ Basis von V und $C = (c_1, \ldots, c_n)$ Basis von W. Definiere

$$f : V \to W, v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n \mapsto f(v) := \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_n c_n.$$

Zeige: f ist ein Isomorphismus.

6. Sei V ein K-Vektorraum mit Basen $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $C = (c_1, \ldots, c_n)$. Zeige: $A_{B\,C} = I$ ($n \times n$ Einheitsmatrix) genau dann, wenn $B = C$.