3. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Linear Algebra 2 für PhysikerInnen
Sommersemester 2013

1. Sei $\mathrm{P}_n(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynomfunktionen von Grad höchstens n, und wähle $B_n := (1, x, \ldots, x^n)$ als Basis. (a) Man stelle die Ableitung $D : \mathrm{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ als Matrix dar; d.h., man berechne $A_{D;B_3,B_2}$, sodaß $D = (\_)_{B_2}^{-1} \circ h_{A_{D;B_3,B_2}} \circ (\_)_{B_3}$. (b) Überprüfe letztere Gleichung durch Anwendung beider Seiten auf $p(x) = 1 + 2x + 3x^2$.

2. Sei $h_A : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_4$ die zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

assoziierte lineare Abbildung. Bestimme $f : \mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}_3(\mathbb{R})$, sodaß $A = A_{f;B_3,B_4}$ mit B_n wie im Beispiel 1, und berechne $f(p(x))$ für $p(x) = 1+2x+3x^2$.

3. Sei $h_A : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_2$ definiert durch

$$h_A(x_1, x_2, x_3) := A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Man berechne eine Basis von $\mathrm{Ker}(h_A)$. (b) Man berechne eine Basis von $\mathrm{Im}(h_A)$.

4. Sei

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 3\,x_1 - 2\,x_3 + x_4 = 0\}.$$

(a) Man beweise $U \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$. (b) Man bestimme eine Basis von U.

5. (a) Man bestimme den Rang der reellen Matrix A und eine Basis des Null-Raums $\mathrm{NR}(A)$. (b) Welche Bedingungen müssen die Komponenten von b erfüllen, damit $Ax = b$ mindestens eine Lösung hat? (c) Welche Lösungen hat $Ax = c$?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. Man berechne jeweils die Dimension und eine Basis der Räume $\mathrm{NR}(A)$, $\mathrm{ZR}(A)$ und $\mathrm{SR}(A)$:

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \text{(b)}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$