5. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Linear Algebra 2 für PhysikerInnen
Sommersemester 2013

1. Man berechne eine links-inverse und/oder eine rechts-inverse Matrix (falls existent) zu folgenden reellen Matrizen:

$$\text{(a)}\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \text{(b)}\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sei $f : \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$ mit $f(\binom{x}{y}) = \binom{2x+y}{x+2y}$. Betrachte folgende Basen im $\mathbb{R}_2$: $B = (e_1, e_2)$ die Standardbasis aus den Einheitsvektoren und $C = (\binom{1}{1}, \binom{1}{-1})$. Seien $A := A_{f;B,B}$ und $A' = A_{f;C,C}$ die darstellenden Matrizen von f bezüglich dieser Basen. (a) Zeige: f ist ein Isomorphismus. (b) Verifiziere die Gleichung $A' = A_{B,C}\, A\, A_{B,C}^{-1}$.

3. Man stelle A als Produkt von Elementar-Matrizen dar:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Man invertiere mit dem Gauß-Jordan Algorithmus die reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Man berechne (Methode beliebig) die LU-Faktorisierung von

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 10 & 16 & 19 \\ 5 & 15 & 26 \end{pmatrix}.$$

6. Man löse das System $(L\,U)x = b$ *ohne* Ausführung der Multiplikation $L\,U$:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

7. Analog zur Vorlesung diskretisiere man mit $h = 1/4$ das Randwertproblem

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = x, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

(Es genügt das Aufstellen der drei inhomogenen linearen Gleichungen.)