7. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Linear Algebra 2 für PhysikerInnen
Sommersemester 2013

1. Man berechne die QR-Faktorisierung der Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

2. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Man berechne Matrizen $S, T \in \mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{C})$, sodaß (a) $S^{-1}AS$ bzw. (b) T^tAT Diagonalmatrizen sind.

3. Man berechne alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A_i. Man vergleiche die Summe der Eigenwerte mit der Summe der Elemente auf der Matrixdiagonale und das Produkt der Eigenwerte mit der Determinante:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Existiert $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, sodaß $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix wird? Falls ja, berechne man S.

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Für beliebige $k \in \mathbb{N}$ berechne man $A^k \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. (Hinweis: Finde, wie im Beispiel 2, eine Diagonalisierung $A = S \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right) S^{-1}$, dann ist $A^k = S \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{smallmatrix}\right) S^{-1}$.)

6. Man berechne A^{100} auf 4 Nachkommastellen genau:

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

7. Sei $E_3 = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}_3$ und $f : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ mit $A_{f;E_3,E_3} = A$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -10 & 0 \\ 5 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3 \times 3; \mathbb{R}).$$

Mit Hilfe von Eigenwerten und Eigenvektoren finde eine Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ des $\mathbb{R}_3$, sodaß $A_{f;B,B}$ eine Diagonalmatrix wird.