8. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Sommersemester 2013

1. Bezüglich der reellen Matrizen A, Q mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}, \qquad Q = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -\sqrt{\lambda_2} & \sqrt{\lambda_1} \\ \sqrt{\lambda_1} & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

verifiziere man folgende Eigenschaften: (a) Die positiven reellen Zahlen $(\lambda_1, \lambda_2) = (5 - 2\sqrt{5}, 5 + 2\sqrt{5})$ sind Eigenwerte von A. (b) Die Spaltenvektoren (q_1, q_2) von Q sind zu λ_1 und λ_2 zugehörige Eigenvektoren von A; sie bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}_2$. (c) Es gilt $Q^{-1} = Q^t$. (d) Es gilt: $Q^t A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

2. Sei $C_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) \in \mathrm{P}(\mathbb{C})$ das charakteristische Polynom der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{C})$. Angenommen, $C_A(\lambda) = c(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ mit $c, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. (a) Zeige: $\lambda_1 \lambda_2 = \det(A)$. (b) Zeige allgemeiner: das Produkt aller Eigenwerte (mit Vielfachheit genommen) einer komplexen $n \times n$ Matrix A ist gleich $\det(A)$. (Hinweis, man verwende den “Hauptsatz der Algebra”: Eine Polynomfunktion $p(\lambda) \in \mathrm{P}(\mathbb{C})$ mit $\mathrm{grad}(p) = n \in \mathbb{N}$ hat eine Darstellung der Form $p(\lambda) = c(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$ mit $c, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$; die Darstellung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Faktoren.)

3. Sei $C_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) \in \mathrm{P}(\mathbb{C})$ das charakteristische Polynom der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{C})$. Angenommen, $C_A(\lambda) = c(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ mit $c, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. (a) Zeige: $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$. (b) Verallgemeinere diese Beobachtung auf beliebige Matrizen $A \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{C})$.

4. Man finde eine orthogonale Matrix $Q \in \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{R})$ (d.h.: $Q^{-1} = Q^t$) und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodaß gilt: $2x^2 - 2xy + 2y^2 = \alpha\, s^2 + \beta\, t^2$ für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ beliebig und $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = Q^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

5. Man berechne eine orthogonale Matrix Q, welche A im Sinne des Spektralsatzes diagonalisiert:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

6. Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. (a) Man beschreibe alle Matrizen $S \in \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{C})$, durch welche die Matrix A diagonalisiert wird. (b) Man beschreibe alle Matrizen $S \in \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{C})$, durch welche die Matrix A^{-1} diagonalisiert wird.

7. Gilt $A^{-1} = A^t$ für beliebige Permutationsmatrizen $A \in \mathrm{M}(3 \times 3; \mathbb{R})$?