9. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
Sommersemester 2013

1. Man bestimme mittels Hauptachsentransformation, welcher Kegelschnitt durch die Kurve zweiter Ordnung im $\mathbb{R}^2$ bestimmt wird:

$$2\,x_1^2 - 4\,x_1x_2 + 3\,x_2^2 - 8\,x_1 + 10\,x_2 - 5 = 0.$$

2. Man zeige: die Hyperfläche zweiter Ordnung im $\mathbb{R}^3$, welche durch die Gleichung

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2yz + z^2 - 2xz + 2x + 2y + 2z - 3 = 0$$

beschrieben wird, kann in die Form $a\,u^2 + b\,v^2 + c\,w^2 = 0$ (a, b, c reelle Konstanten) gebracht werden. Welches geometrische Gebilde ergibt sich konkret?

3. Sei die Folge $(G_k)_{k\geq 0}$ wie folgt definiert: $G_{k+2} = (G_{k+1} + G_k)/2$ für $k \geq 0$. (a) Finde eine 2×2 Matrix A, sodaß

$$\begin{pmatrix} G_{k+2} \\ G_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren von A, und daraus eine diagonalisierende Matrix S mit $S^{-1}AS = D$. (c) Bestimme $\lim_{n\to\infty} A^n$. (d) Man zeige, daß für $G_0 = 0$ und $G_1 = 1$ gilt: $\lim_{k\to\infty} G_k = 2/3$.

4. Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{C})$. Man beweise: (a) A ist genau dann regulär, wenn 0 kein Eigenwert von A ist. (b) $C_A(\lambda) = C_{A^t}(\lambda)$.

5. Man beschreibe *alle* orthogonalen Matrizen, durch die A diagonalisiert werden kann:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

6. Ist $\lambda = a + i\,b \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert einer reellen Matrix, so ist auch $\overline{\lambda} = a - i\,b$ ein Eigenwert. (a) Warum? (b) Man beweise, daß jede reelle 3×3 Matrix mindestens einen reellen Eigenwert hat.

7. Man beweise: jede symmetrische relle 2×2 Matrix A hat eine Darstellung $A = \lambda_1\, q_1\, {q_1}^t + \lambda_2\, q_2\, {q_2}^t$ mit orthonormalen Vektoren $q_j \in \mathbb{R}_2$ und reellen Zahlen λ_j, $j = 1, 2$. (Also ist A eine Linearkombination von Projektionsmatrizen!)

Dieser Zettel ist für den 27. Mai. Für den 13. Mai ist der 8. Zettel.