Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
1. Übungsblatt für den 10. 3. 2014

1. Sei $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ und $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\operatorname{sgn}(f), \operatorname{sgn}(g)$ und $\operatorname{sgn}(f \circ g)$.

2. Sei D eine Funktion $\mathrm{Mat}_{4\times4}(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}$, die multilinear, alternierend, identitätserkennend und 1-erhaltend ist. Bestimmen Sie
$$D(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}).$$

3. Sei D eine Funktion $\mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}$, die multilinear, alternierend und 1-erhaltend ist.Zeigen Sie, dass für alle $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$
$$D(\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & 2 \\ a_2 & a_2 & 0 \\ a_3 & a_3 & 1 \end{pmatrix}) = 0$$
gilt.

4. Zeigen Sie, dass die Funktion $D_2 : \mathrm{Mat}_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$$
multilinear, alternierend und 1-erhaltend ist.

5. Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Es gelte $A^T = -A$.
   (a) Zeigen Sie, dass $\det(A) = 0$.
   (b) Zeigen Sie, dass aus $A^T = -A$ folgt, dass $a_{ii} = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

6. Berechnen Sie die Determinante der Matrix A, wobei
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}.$$
Hinweis: Berechnen Sie zunächst $\det(A \cdot A^T)$.

7. Bestimmen Sie x_3 in foldendem Gleichungssystem mit der Cramerschen Regel:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

8. Berechnen Sie die Determinante folgender Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$